Streszczenie rozprawy doktorskiej:

Zastosowanie twierdzenia o przełęczy górskiej w anizotropowych układach Eulera-Lagrange'a

Magdalena Chmara

Celem rozprawy jest udowodnienie twierdzeń dotyczących istnienia oraz krotności rozwiązań anizotropowego układu równań Eulera-Lagrange'a postaci:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{L}_v(t,u(t),\dot{u}(t)) = \mathcal{L}_x(t,u(t),\dot{u}(t)) \quad \text{dla p.w. } t \in I, \\ u(-T) = u(T), \\ \mathcal{L}_v(\cdot,u,\dot{u})(-T) = \mathcal{L}_v(\cdot,u,\dot{u})(T) \end{cases} \tag{AELT}$$

dla funkcji Lagrange'a

$$\mathcal{L}(t,x,v) = F(t,x,v) + V(t,x) + \langle f(t), x\rangle,$$

gdzie $F \in \mathbf{C}^1(I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $V \in \mathbf{C}^1(I \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ oraz $I = [-T,T] \subset \mathbb{R}$.

W literaturze rozważa się problem (AELT) z różnymi postaciami funkcji F, m.in. z funkcją potęgową $\frac{1}{p}|v|^p$, czy izotropową N-funkcją $N(|v|)$. W tej rozprawie rozważamy funkcję $F(t,x,v)$ o wzroście wielomianowym, która może być funkcją anizotropową ze względu na trzecią współrzędną. Przykładem takiej funkcji jest:

$$F(t,x,v) = G(v)(2 + |x|^p - \sin t),$$

gdzie G jest anizotropową G-funkcją.

W celu znalezienia nietrywialnych rozwiązań (AELT) stosujemy podejście wariacyjne, tzn. szukamy punktów krytycznych funkcjonału $\mathcal{J}\colon \mathbf{W}^1_T\mathbf{L}^G \to \mathbb{R}$ danego wzorem

$$\mathcal{J}(u) = \int_I \mathcal{L}(t,u,\dot{u})\,dt,$$

gdzie $\mathbf{W}^1_T\mathbf{L}^G(I,\mathbb{R}^N) = \left\{u \in \mathbf{W}^1\mathbf{L}^G\colon\ u(-T) = u(T)\right\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni Orlicza-Sobolewa wyznaczonej przez G-funkcję G. Podstawowe informacje na temat G-funkcji oraz przestrzeni Orlicza i przestrzeni Orlicza-Sobolewa, a także lematy techniczne znajdują się w pierwszym rozdziale rozprawy.

Pierwszym głównym rezultatem rozprawy jest twierdzenie o istnieniu nietrywialnego rozwiązania problemu (AELT). Twierdzenie to sformułowane zostało dla pięciu różnych założeń na potencjał w otoczeniu zera. Narzędziem używanym do odnalezienia pierwszego rozwiązania jest twierdzenie o przełęczy górskiej. Wybór otoczenia zera Ω zależy bezpośrednio od wyboru założenia na potencjał. Może być ono kulą lub przeciwobrazem pewnego funkcjonału wypukłego. Lematy i twierdzenia składające się na dowód tego twierdzenia podane zostały w rozdziale drugim. Treść twierdzenia o pierwszym rozwiązaniu znajduje się w rozdziale trzecim.

W rodziale trzecim podano także kolejny rezultat, czyli twierdzenia o istnieniu drugiego rozwiązania problemu (AELT). Rozwiązanie to znajduje się we wnętrzu zbioru Ω. Do jego uzyskania wykorzystano wariacyjną zasadę Ekelanda. Rozważane są dwie sytuacje: $f \equiv 0$ i $f \not\equiv 0$. Sytuacja $f \equiv 0$ wymaga dodatkowego warunku na geometrię lagranżjanu w otoczeniu zera. Wymusza ona by funkcjonał działania posiadał minimum w otoczeniu zera, ale nie w zerze. Dzięki temu ciąg minimalizujący znaleziony przy pomocy zasady Ekelanda nie będzie zbiegał do rozwiązania trywialnego. W przypadku $f \not\equiv 0$ dodatkowe założenie nie jest potrzebne.

Przykłady, które ilustrują geometryczną stronę zagadnienia, w szczególności wpływ anizotropowości na geometrię przełęczy, podane zostały w rozdziale czwartym. Na końcu rozprawy krótko przedstawiono możliwe kierunki dalszych badań.