



**POLITECHNIKA
GDAŃSKA**

Imię i nazwisko autora rozprawy: Adrian Myszkowski
Dyscyplina naukowa: matematyka

ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Rozwinięcia okresowe niezmienników topologicznych iteracji w teorii punktów okresowych odwzorowań gładkich

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Periodic expansion of the topological invariants of iterations in the theory of periodic points of smooth maps

Promotor

podpis

prof. dr hab. Grzegorz Graff

Gdańsk, 20.06.2022

Streszczenie

Niniejsza rozprawa składa się z dwóch części. W obu badamy dyskretne topologiczne układy dynamiczne, korzystając z rozwinięcia okresowego niezmienników topologicznych iteracji.

Część pierwsza dotyczy badania minimalnych zbiorów okresów Lefschetza dla dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a na rozmaitościach zamkniętych. Klasyczne wyniki w tej dziedzinie opisują charakterystykę możliwych zbiorów $MPer_L(f)$ oraz wyliczenia wartości niezmiennika. Głównym wynikiem tej części rozprawy jest wprowadzenie nowej reprezentacji zbioru minimalnych okresów Lefschetza za pomocą rozwinięcia okresowego ciągu liczb Lefschetza. Stosując wprowadzone metody rozwiązujemy częściowo dwa problemy otwarte Llibre oraz Sirventa z 2013 roku oraz w pełni problem postawiony przez Iskrę i Sirventa w 2012 roku. Przedstawiamy także algorytm obliczenia niezmiennika dla nieorientowalnych powierzchni zamkniętych genusu g .

W drugiej części rozważamy funkcję gładką f na jednopójnej rozmaitości zwartej bez brzegu lub z jednopójnym brzegiem. Badamy minimalną liczbę punktów r -okresowych w gładkiej C^1 homotopii funkcji f . Podany problem rozwiązuje niezmiennik Dolda. Przedstawiamy uogólnione metody kombinatoryczne pozwalające na obliczenie niezmiennika Dolda dla dowolnych r w przypadku rozmaitości jednopójnych. Stosując wyprowadzone metody, badamy minimalną liczbę punktów okresowych w gładkiej klasie homotopii funkcji zdefiniowanych na 4-rozmaitościach z określoną (dodatnie lub ujemnie) formą przecięcia. Wprowadzamy metody kombinatoryczne obliczania wartości niezmiennika Dolda dla rozmaitości z brzegiem. Wyznaczamy warunki, dla których odwzorowania par kuli domkniętej w siebie posiadają jeden punkt r -okresowy w gładkiej klasie homotopii. Wyznaczamy także wartość niezmiennika w szczególnych przypadkach, np. dla punktów r -okresowych dla r będących iloczynem różnych liczb pierwszych.

Słowa kluczowe: liczba Lefschetza, liczba Nielsena, liczba Dolda, indeks punktu stałego, stopień topologiczny, minimalny zbiór okresów Lefschetza, zbiór okresów algebraicznych, dyfeomorfizm Morse'a-Smale'a, rozwinięcie okresowe, 4-rozmaitości

Klasyfikacja AMS: 11A07, 37B30, 37C05, 37C25, 37C30, 37C35, 55M25, 58C30

Dziedzina nauki: matematyka

Abstract

This dissertation consists of two parts. In both we study discrete topological dynamical systems using the periodic expansion of the topological invariants of iterations.

The first part concerns the study of minimal sets of Lefschetz periods for Morse-Smale diffeomorphisms on closed manifolds. Classical results in this area describe the characterization of possible sets of $\text{MPer}_L(f)$ and provide the computation of invariant values. The main result of this part of the thesis is a new representation of the minimal set of Lefschetz periods by means of the periodic expansion of the sequence of Lefschetz numbers. Using the introduced methods we partially solve two open problems of Llibre and Sirvent from 2013 and fully solve the problem posed by Iskra and Sirvent in 2012. We also present an algorithm for computing the invariant for non-orientable closed surfaces of the genus g .

In the second part, we consider a smooth function f on a simply connected compact manifold without boundary or with simply connected boundary. We study the minimal number of r -periodic points in the smooth C^1 homotopy function f . The stated problem is solved by Dold's invariant. We present generalized combinatorial methods which allow to compute Dold's invariant for any r in the case of a simply connected manifolds. Using the derived methods, we study the minimal number of periodic points in a smooth homotopy class of functions defined on 4-manifolds with a definite (positive or negative) intersection form. We introduce combinatorial methods for computing the value of the Dold invariant for a manifold with boundary. We determine conditions for which self-maps of pair of sets on spheres have a single r -periodic point in a smooth homotopy class. We also determine the value of the invariant in special cases, e.g. for r -periodic points for r being a product of different prime numbers.

Keywords: Lefschetz number, Nielsen number, Dold number, fixed point index, topological degree, minimal set of Lefschetz periods, set of algebraic periods, Morse-Smale diffeomorphism, periodic expansion, 4-manifolds

AMS Classification: 11A07, 37B30, 37C05, 37C25, 37C30, 37C35, 55M25, 58C30

Field of science: mathematics

Spis treści

Wstęp	9
1 Preliminaria	15
1.1 Lista oznaczeń	15
1.2 Euklidesowe retrakty otoczeniowe	16
1.3 Indeks punktu stałego	16
1.4 Liczba Lefschetza	20
2 Rozwinięcie okresowe	23
2.1 Rozwinięcie okresowe liczb Lefschetza	23
2.2 Rozwinięcia okresowe indeksów iteracji w punktach okresowych dyfeomorfizmów	25
2.3 Rozwinięcie okresowe liczb Lefschetza funkcji quasi-unipotentnych	26
3 Minimalny zbiór okresów Lefschetza	29
3.1 Dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a	29
3.2 Funkcja zeta Lefschetza	31
3.3 Minimalne zbiory okresów Lefschetza	32
3.4 Reprezentacja $MPer_L(f)$ za pomocą rozwinięcia okresowego	34
3.5 Realizacja zbioru minimalnych okresów Lefschetza na N_g	37
3.6 Realizacja zbioru minimalnych okresów Lefschetza na M_g	40
3.7 Algorytmiczne podejście do znajdowania $MPer_L(f)$	48
4 Minimalizacja liczby punktów okresowych w gładkiej klasie homotopii dla rozmaitości bez brzegu	51
4.1 Konstrukcja niezmiennika $D_r^m[f]$	52
4.2 Indeksy punktów r -okresowych	53
4.3 Kombinatoryczna postać niezmiennika $D_r^m[f]$	54
4.4 $D_r^4[f]$ dla 4-wymiarowych rozmaitości z określoną formą przecięcia	62
4.4.1 $AP_r(f)$ dla 4-wymiarowych rozmaitości z określoną formą przecięcia	63
4.4.2 Funkcje gładkie 4-wymiarowych rozmaitości z określoną formą przecięcia	67
4.4.3 Punkty okresowe odwzorowań transwersalnych	68
4.4.4 Wartość $D_r^4[f]$ dla r będącego iloczynem różnych liczb pierwszych	69
4.5 Algorytmiczne podejście do znajdowania $D_r^m[f]$ mod $reg_{1,2}$	71

5 Minimalizacja liczby punktów okresowych w gładkiej klasie homotopii dla rozmaitości z brzegiem	75
5.1 Konstrukcja niezmiennika $D_r(f; M, \partial M)$	75
5.2 Indeksy punktów r -okresowych odwzorowań zachowujących brzeg . . .	76
5.3 Redukcja punktów r -okresowych do jednego punktu dla odwzorowań par sfery w siebie	77
5.4 Kombinatoryczny schemat obliczania $D_r(f; M, \partial M)$	81
5.5 Minimalna liczba punktów okresowych realizowana na brzegu	84
Spis rysunków	89
Spis tabel	89
Bibliografia	91

Wstęp

Klasycznym zagadnieniem w teorii topologicznych układów dynamicznych jest pytanie o minimalną liczbę punktów okresowych w klasie homotopii lub przynajmniej o zbiór minimalnych okresów w klasie homotopii odwzorowania przekształcającego zwartą rozmaitość w siebie. Niniejsza praca porusza dwa zagadnienia. Pierwsze dotyczy minimalizacji zbioru okresów w klasie homotopii dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a, natomiast drugie związane jest z kwestią minimalizacji liczby punktów okresowych w gładkiej klasie homotopii. Powyższe problemy łączy intensywne wykorzystywanie pojęcia rozwinięcia okresowego niezmienników topologicznych iteracji funkcji. W dalszej części wstępu przedstawimy każdy z tych obszarów tematycznych osobno, wyróżniając powiązania pomiędzy nimi.

Zacznijmy do opisu pierwszego obszaru. Homotopijny minimalny zbiór okresów

$$\text{HPer}(f) = \bigcap_{g \sim f} \text{Per}(g)$$

był po raz pierwszy badany w pracy L. S. Efremovej [20] oraz w artykule L. Blocka, J. Guckenheimera, M. Misiurewicza i L. S. Younga [7], którzy przedstawili pełną charakteryzację $\text{HPer}(f)$ dla funkcji zdefiniowanych na S^1 . Wynik ten następnie uogólniony został dla wielowymiarowych torusów (B. Jiang, J. Llibre [69]). Późniejsze badania zostały rozszerzone na inne przestrzenie, o których wspominamy w Rozdziale 3. Oprócz różnych przestrzeni, rozważano również różne klasy funkcji, w szczególności J. Llibre oraz W. Marzantowicz w [78] podali pełen opis homotopijnego minimalnego zbioru okresów dla funkcji holomorficznych zdefiniowanych na zwartych powierzchniach Riemanna.

Od 2007 roku prezentowana tematyka jest intensywnie badana dla pewnej klasy odwzorowań gładkich, jaką są dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a $f: M \rightarrow M$, zdefiniowane na zwartej rozmaitości M . Po raz pierwszy problem scharakteryzowania zbioru okresów $\text{Per}(f)$ dla dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a został przedstawiony przez J.L.G. Guirao, J. Llibre dla S^2 w [56]. Ci sami autorzy scharakteryzowali zbiór okresów $\text{Per}(f)$ oraz $\text{MPer}_{ms}(f) = \bigcap_{f \sim g} \text{Per}(g)$, gdzie g przebiega po wszystkich dyfeomorfizmach Morse'a-Smale'a, zdefiniowanych na torusie T^2 [55]. W obu pracach korzystano m.in. z funkcji zeta Lefschetza (Definicja 3.7) i twierdzenia Franka (Twierdzenie 3.9).

Są to jedyne prace, w których poza opisem zbiorów okresów i homotopijnych minimalnych zbiorów okresów dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a, udowodniono również istnienie dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a odpowiadających wspomnianym zbiorom (tzw. *topologiczne realizacje zbioru*). Nie są znane topologiczne realizacje zbiorów $\text{Per}(f)$ i $\text{MPer}_{ms}(f)$ w innych przypadkach niż wspomniany powyżej T^2 .

Metody badań Guirao i Llibre dały początek nowemu niezmiennikowi, jakim jest

minimalny zbiór okresów Lefschetza $\text{MPer}_L(f)$, któremu został poświęcony Rozdział 3. Przez ostatnie lata $\text{MPer}_L(f)$ był badany dla dyfeomorfizmów Morse’a-Smale’a wielu przestrzeni, m.in. orientowalnych M_g i nieorientowalnych N_g zamkniętych powierzchni bez brzegu, dysku z otworami, T^n , $S^l \times \dots \times S^l$ i innych, o których więcej informacji można znaleźć w Podrozdziale 3.3.

Jednym z celów rozprawy jest skonstruowanie nowej reprezentacji zbioru $\text{MPer}_L(f)$, która pozwoli na stosowanie nowych metod badania minimalnego zbioru okresów Lefschetza. Do tej pory definicja zbioru $\text{MPer}_L(f)$ opierała się na przedstawieniu funkcji zeta Lefschetza $Z_f(t)$ w pewnej niejednoznacznej postaci

$$Z_f(t) = \prod_{i=1}^{\eta(f)} (1 + \Delta_i t^{r_i})^{m_i}, \quad (1)$$

gdzie $\Delta_i \in \{-1, 1\}$, r_i są dodatnimi liczbami całkowitymi, m_i są niezerowymi liczbami całkowitymi oraz $\eta(f)$ jest liczbą naturalną zależną od funkcji f . Wtedy $\text{MPer}_L(f)$ definiuje się jako

$$\text{MPer}_L(f) := \bigcap \{r_1, \dots, r_{\eta(f)}\},$$

biorąc przecięcie po wszystkich możliwych przedstawieniach $Z_f(t)$ w postaci (1) (por. Definicja 3.13). Z uwagi na taki sposób przedstawienia niezmiennika, stosowane metody badawcze ograniczały się do kombinatoryki funkcji zeta Lefschetza. Jednym z problemów była niejednoznaczność wzoru (1) oraz brak przedstawionej metody znajdowania wszystkich wspomnianych postaci funkcji $Z_f(t)$. Między innymi z tego powodu dotychczasowe obliczenia niezmiennika ograniczały się do nielicznych przykładów wykonywanych ręcznie, co mogło powodować błędy.

W pracy przedstawiamy rozwinięcie metod badania $\text{MPer}_L(f)$ o nową reprezentację zbioru, na podstawie jednoznacznego rozwinięcia okresowego ciągu liczb Lefschetza $\{L(f^n)\}_{n=1}^{\infty}$, którego współczynniki b_i można wyliczyć. Dokładniej mówiąc, pokażemy, że dla dyfeomorfizmu Morse’a-Smale’a zwartej rozmaitości zamkniętej M , dla którego $L(f^n) = \sum_i b_i \text{reg}_i(n)$, minimalny zbiór okresów Lefschetza wyraża się za pomocą wzoru

$$\text{MPer}_L(f) = \{i : b_i \neq 0 \text{ oraz } i \text{ jest liczbą nieparzystą}\} = AP_r(f) \cap (2\mathbb{N} - 1). \quad (2)$$

Powyższa reprezentacja (Twierdzenie 3.14) pozwala na zalgorytmizowanie i przeprowadzenie obliczeń komputerowych w celu wyznaczania wartości niezmiennika. Stosując reprezentację (2) przedstawimy częściowe rozwiązanie problemu Llibre i Sirvent’a, dotyczącego istnienia dyfeomorfizmu Morse’a-Smale’a $f: N_g \rightarrow N_g$ dla dowolnego skończonego zbioru S nieparzystych liczb naturalnych spełniającego $\text{MPer}_L(f) = S$. W pracy prezentujemy algorytm obliczania minimalnego zbioru okresów Lefschetza dla rozmaitości N_g , dzięki któremu wykonaliśmy obliczenia dla genusu $g = 1, \dots, 54$. Wskażemy również pewne przeoczenie w Twierdzeniu 8 (J. Llibre, V.F. Sirvent [82]) i uzupełnimy o brakujący element.

Drugi główny temat pracy wiąże się z odpowiedzią na pytanie o najmniejszą liczbę punktów okresowych w gładkiej klasie homotopii na zwartych, jednospójnych rozmaitościach bez brzegu lub z jednospójnym brzegiem. Wprowadźmy kontekst historyczny rozpoczynając od minimalizacji w klasie homotopii (pisząc w ten sposób

będziemy mieć na myśli ciągłą klasę homotopii), a następnie przechodząc do gładkiej klasy homotopii i badanych w rozprawie niezmienników $D_r^m[f]$ oraz $D_r(f; M, \partial M)$.

S. Lefschetz na początku sławnego cyklu swoich prac dotyczących układów dynamicznych [76] w 1923 roku dostrzegł wagę problemu minimalizacji liczby punktów stałych w klasie homotopii. Liczba Lefschetza, choć jest homotopijnym niezmiennikiem, to algebraicznie zlicza punkty stałe z wielokrotnościami (por. Twierdzenie 1.18). Dlatego, w celu dokładnego zbadania minimalnej ilości punktów stałych w klasie homotopii, należało poszukać innych, bardziej precyzyjnych metod.

Problem minimalizacji liczby punktów stałych w klasie homotopii był również przedmiotem badań Nielsena, który w swojej pracy doktorskiej z 1924 roku [88], rozważając podniesienia funkcji $f: T^2 \rightarrow T^2$ do nakrycia uniwersalnego, podał sposób zliczania minimalnej ilości punktów stałych w klasie homotopii. Wynik ten był znany już wcześniej i dowiedziony przez Brouwera [8]. Jednak sposób Nielsena był znacznie bardziej ogólny, a metody przez niego stosowane stanowiły podwalinę zdefiniowania liczby Nielsena $N(f)$. Odpowiada ona na pytanie o minimalną liczbę punktów stałych w klasie homotopii dla rozmaitości zwartych, spójnych i bez brzegu wymiaru co najmniej 3 (zob. [94]) tj.

$$N(f) = \min\{\#\text{Fix}(g) : g \sim f\}.$$

Natomiast dla punktów okresowych o ustalonym okresie $r \in \mathbb{N}$ powyższy problem rozwiązuje liczba Nielsena rzędu r

$$NF_r(f) = \min\{\#\text{Fix}(g^r) : g \sim f\}, \quad (3)$$

zdefiniowana przez B. Jianga w 1983 roku [70] jako dolne oszacowanie minimalnej liczby punktów okresowych w klasie homotopii. Dopiero w 2006 roku J. Jezierski [63] udowodnił równość (3).

Nasuwa się pytanie, czy w klasie funkcji gładkich (klasy C^1) minimalna ilość punktów stałych lub okresowych uległaby zmianie? W pracy [68] B. Jiang wykazał, że w kontekście punktów stałych odpowiedź jest negatywna. Okazuje się jednak, że dla punktów okresowych o okresie $r > 1$, gładkość ma istotne znaczenie. G. Graff i J. Jezierski w cyklu artykułów [28, 29, 31, 30, 32] zdefiniowali niezmiennik Nielsena-Jianga-Dolda $NJD_r(f)$ (dla rozmaitości jednospójnych oznaczany jako niezmiennik Dolda $D_r^m[f]$) oraz pokazali, że

$$NJD_r(f) = \min\{\#\text{Fix}(g^r) : g \stackrel{s}{\sim} f\},$$

gdzie $\stackrel{s}{\sim}$ oznacza gładką klasę homotopii. Analogiczny problem rozważany był również (w 2017 r. [33]) dla odwzorowań zachowujących brzeg $(f, \bar{f}): (M, \partial M) \rightarrow (M, \partial M)$ zdefiniowanych na zwartej i jednospójnej rozmaitości M wymiaru $m \geq 4$ z jednospójnym brzegiem ∂M . W gładkiej klasie funkcji par $(f, \bar{f}): (M, \partial M) \rightarrow (M, \partial M)$ zachodzi

$$D_r(f; M\partial M) = \min\{\#\text{Fix}(g^r) : (g, \bar{g}) \stackrel{s}{\sim} (f, \bar{f})\}.$$

Wobec tego kolejnym celem pracy jest rozszerzenie metod kombinatorycznych obliczania dwóch niezmienników $D_r^m[f]$ oraz $D_r(f; M, \partial M)$. W pierwszym punkcie poniżej zajmiemy się motywacją badań, trudnościami i sposobami ich rozwiązania dla niezmiennika $D_r^m[f]$. Z kolei w punkcie drugim przedstawimy te elementy dla niezmiennika $D_r(f; M, \partial M)$.

1. $D_r^m[f]$

Do tej pory, mimo zdefiniowania $D_r^m[f]$ dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$, metody kombinatoryczne pozwalające na przeprowadzenie obliczeń zostały wyprowadzone dla punktów okresowych o okresach r nieparzystych. Podobnie, również jedyny znany dotąd algorytm obliczania $D_r^m[f]$ pozwalający na obliczenia komputerowe, działa dla nieparzystych r .

Brak sformułowania metod kombinatorycznych znajdowania niezmiennika Dolda $D_r^m[f]$ wynika ze skomplikowania możliwych postaci ciągów indeksów punktów r -okresowych, a w szczególności pierwszych dwóch współczynników ich rozwinięcia okresowego (por. Twierdzenie 4.6).

W pracy podana zostanie czysto kombinatoryczna konstrukcja niezmiennika $H_2(B; l)$, gdzie $B \subsetneq \mathbb{N}$ (rozszerzająca znany do tej pory $H(B; l)$) oraz minimalnego rozkładu z dwójką zbioru B (rozszerzająca znany minimalny rozkład zbioru B). Stosując $H(B; l)$ i $H_2(B; l)$ opiszemy wartości niezmiennika $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$ (równy $D_r^m[f]$ lub $D_r^m[f] + 1$). Wyznamy wzór na $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$ w przypadku, gdy r jest iloczynem liczb pierwszych (co uogólnia Lemmat 5.4 [32]) oraz opiszemy w jaki sposób uzyskać wartość $D_r^m[f]$ mając dane $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$ (co uogólnia Twierdzenie 5.5 [32]). Następnie zastosujemy metody dla rozmaitości 4-wymiarowych z określoną (dodatnie lub ujemnie) formą przecięcia.

2. $D_r(f; M, \partial M)$

Niezmiennik $D_r(f; M, \partial M)$ wyrażony jest przez dekompozycję ciągów liczb Lefschetza $\{L(f^n)\}_{n=1}^\infty$, $\{L(\bar{f}^n)\}_{n=1}^\infty$ iteracji funkcji f^n i $\bar{f}^n = f^n|_{\partial M}$ na minimalną liczbę odpowiednich kombinacji ciągów indeksów punktu stałego w punktach stałych iteracji (por. Definicja 5.3). Celem ostatniej części niniejszej rozprawy jest wyrażenie powyższego niezmiennika w terminach czysto kombinatorycznych oraz obliczenie go w szczególnych przypadkach. Wyprowadzimy również nierówności szacujące wartość niezmiennika w pewnych szczególnych przypadkach i zastanowimy się, kiedy minimalna liczba punktów okresowych w gładkiej klasie homotopii może zostać zrealizowana przez funkcję posiadającą punkty okresowe leżące wyłącznie na brzegu rozmaitości.

Do najważniejszych wyników zawartych w pracy należą:

- Część pierwsza.
Utworzenie nowej reprezentacji zbioru $\text{MPer}_L(f)$ za pomocą rozwinięcia okresowego ciągu liczb Lefschetza. Częściowe rozwiązanie Problemów 3.16 i 3.23 oraz całkowite rozwiązanie Problemu 3.33. Wyprowadzenie algorytmu znajdowania wszystkich możliwych postaci $\text{MPer}_l(f)$ dla dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a zdefiniowanych na N_g .
- Część druga.
Uogólnienie metod kombinatorycznych obliczania niezmiennika Dolda $D_r^m[f]$. Zbadanie zbiorów algebraicznych okresów $AP_r(f)$ funkcji zdefiniowanych na 4-wymiarowych rozmaitościach ze zdefiniowaną formą przecięcia. Zastosowanie wyników dotyczących $AP_r(f)$ do wyznaczenia wartości $D_r^4[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$ w szczególnych przypadkach. Wyznaczenie metod kombinatorycznych obliczania niezmiennika Dolda dla funkcji par $D_r(f; M, \partial M)$ (w szczególności Twierdzenia 5.14, 5.16, 5.21).

Rozprawa została podzielona na pięć rozdziałów. W pierwszym rozdziale Preliminaria znajdują się podstawowe definicje i twierdzenia, dotyczące indeksu punktu stałego oraz liczby Lefschetza iteracji funkcji.

W drugim rozdziale znajduje się opis rozwinięcia okresowego wprowadzonego przez P. Nowaka-Przygodzkiego i W. Marzantowicza w pracy [12]. Przedstawione zostało rozwinięcie ciągu indeksów punktu stałego i po liczb Lefschetza w klasie funkcji ciągłych oraz ich szczególne własności dla dyfeomorfizmów i funkcji quasi-unipotentnych. W tej części pokazane zostało również powiązanie rozwinięcia okresowego z funkcją zeta Lefschetza.

Wynikiem zawartym w rozdziale jest dowód Twierdzenia 2.5, który został opracowany wspólnie z promotorem.

W trzecim rozdziale wprowadzamy pojęcie minimalnego zbioru okresów Lefschetza $MPer_L(f)$ dla dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a zamkniętej rozmaitości w sobie. Pokazujemy, że $MPer_L(f)$ jest niezmiennikiem homotopijnym. Wprowadzamy nową reprezentację minimalnego zbioru okresów Lefschetza za pomocą nieparzystych indeksów niezerowych współczynników rozwinięcia okresowego dyfeomorfizmu. Następnie przedstawiamy częściowe rozwiązanie dwóch otwartych problemów dotyczących realizacji skończonych podzbiorów liczb nieparzystych jako $MPer_L(f)$ pewnych dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a na nieorientowalnej i orientowalnej zamkniętej powierzchni bez brzegu. Prezentujemy pełne rozwiązanie podobnego problemu tj. realizacji dowolnego skończonego zbioru liczb nieparzystych S poprzez funkcję zeta specjalnej postaci \mathcal{Z}_p której odpowiadałby zbiór $MPer_L(\mathcal{Z}_p) = S$. Finalnie przedstawiamy algorytm pozwalający na przeprowadzenie obliczeń komputerowych niezmiennika $MPer_L(f)$.

Wyniki własne zawarte z rozdziale:

- Lematy 3.12 (dowód), 3.13, Twierdzenie 3.14 (wspólnie ze współautorami), Przykłady 3.11, 3.15.
- Częściowe rozwiązanie Problemu 3.16 (Twierdzenia 3.17, 3.18, Wniosek 3.20) i Problemu 3.23 (Lematy 3.24, 3.25, 3.28, Twierdzenia 3.27, 3.30, Wniosek 3.31) oraz kompletne rozwiązanie Problemu 3.33 (Lemat 3.34).
- Konstrukcja algorytmu pozwalającego na przeprowadzenie obliczeń komputerowych $MPer_L(f)$.

Rozdział czwarty poświęcony jest badaniu minimalnej liczby punktów r -okresowych w gładkiej klasie homotopii $D_r^m[f]$ dla zwartych i jednospójnych rozmaitości bez brzegu. Wprowadzamy nową definicję liczby $H_2(B; l)$ oraz minimalnego rozkładu zbioru z dwójką zbioru B . Powyższa definicja pozwala na uogólnienie trzech twierdzeń. Pierwsze twierdzenie przedstawia czysto kombinatoryczne opisanie $D_r^m[f]$ mod $\text{reg}_{1,2}$ również dla parzystych r . Drugie twierdzenie przedstawia formułę na wartość $D_r^m[f]$ mod $\text{reg}_{1,2}$ w przypadku, gdy r jest iloczynem liczb pierwszych i $AP_r(f) = \text{Div}(r)$. Trzecie twierdzenie pozwala na wyznaczenie wartości $D_r^m[f]$ za pomocą $D_r^m[f]$ mod $\text{reg}_{1,2}$. W dalszej części badamy zbiór okresów algebraicznych $AP_r(f)$ dla funkcji zdefiniowanych dla jednospójnych 4-rozmaitości z zdefiniowaną (dodatnio lub ujemnie) formą przecięcia oraz obliczamy $D_r^m[f]$ w szczególnych przypadkach. W ostatnim podrozdziale przedstawiamy pseudokod algorytmu, pozwalającego na obliczenia komputerowe $D_r^m[f]$ mod $\text{reg}_{1,2}$ również dla punktów okresowych o parzystym okresie.

Wyniki własne składają się na opracowanie Podrozdziału 4.3 oraz konstrukcji Algorytmu 1. Wyniki zawarte w Podrozdziale 4.4 zostały opracowane wspólnie ze współautorami artykułu [60].

W ostatnim rozdziale pracy rozwijamy kombinatoryczne metody badania minimalnej liczby punktów r -okresowych w gładkiej klasie homotopii $D_r(f; M, \partial M)$ dla funkcji par zwartych i jednospójnych rozmaitości z brzegiem.

Wynikami własnymi są Twierdzenie 5.11 i Twierdzenie 5.21 (na podstawie [35]). Natomiast wyniki opracowane wspólnie ze współautorami artykułu, to Twierdzenie 5.14 i Twierdzenie 5.16.

Moje badania były wspierane w ramach grantu Narodowego Centrum Nauki Sheng 1 UMO-2018/30/Q/ST1/00228.

* * *

Pierwsze i najważniejsze podziękowania chciałbym złożyć mojemu promotorowi prof. dr hab. Grzegorzowi Graffowi. Dziękuję za wprowadzenie mnie w zagadnienia topologicznych układów dynamicznych oraz za ogromne wsparcie podczas pisania tej rozprawy, a także całego okresu studiów i naszej współpracy. Jestem wdzięczny za wszystkie cenne wskazówki, cierpliwość oraz motywację do rozwoju na polu naukowym.

Dziękuję również moim rodzicom za umożliwienie mi wybrania takiej ścieżki i bezwzględna akceptację moich decyzji. Bardzo dziękuję też bratu za wspieranie mnie w trudniejszych momentach.

Na koniec chciałbym podziękować mojej narzeczonej Natalii, przede wszystkim za wsparcie i wyrozumiałość, ale również za słuszne uwagi edytorskie podczas powstawania tej pracy.

Rozdział 1

Preliminaria

Głównym obiektem badań prezentowanych w rozprawie są topologiczne dyskretne układy dynamiczne. W tym rozdziale przedstawimy podstawowe definicje i twierdzenia, do których będziemy odwoływać się często w dalszych częściach pracy. Opiszemy przestrzenie na których będziemy pracować oraz wprowadzimy najważniejsze niezmienniki topologiczne i ich własności. Rozpocniemy od wprowadzenia listy oznaczeń.

1.1 Lista oznaczeń

Następujące symbole będą często stosowane w niniejszej rozprawie:

$\#X$	moc zbioru X
$D_r^m[f]$	niezmiennik Dolda odwzorowania f
$D_r(f; M, \partial M)$	niezmiennik Dolda odwzorowania par f
$\deg(f)$	stopień topologiczny odwzorowania f
$\deg(f, U)$	stopień topologiczny odwzorowania f na zbiorze U
$\text{Deg}(f)$	stopień (najwyższa potęga) wielomianu f
$\text{Fix}(f)$	zbiór punktów stałych odwzorowania f , $\text{Fix}(f) = \{x : f(x) = x\}$
$\text{GCD}(a, b)$	największy wspólny dzielnik a i b
$H(A; l)$	moc minimalnego rozkładu zbioru A
$H_2(A; l)$	moc minimalnego rozkładu z dwójką zbioru A
$H(A, B; a, b)$	moc minimalnego rozkładu pary zbiorów (A, B)
$H_i(X; \mathcal{R})$	i -ta grupa homologii przestrzeni X o współczynnikach w pierścieniu \mathcal{R} , (w pracy $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$ lub $\mathcal{R} = \mathbb{Q}$)
$H^i(X; \mathcal{R})$	i -ty pierścień kohomologii przestrzeni X o współczynnikach w pierścieniu \mathcal{R} , (w pracy $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$ lub $\mathcal{R} = \mathbb{Q}$)
$\text{ind}(f)$	indeks punktu stałego odwzorowania f
$\text{ind}(f, U)$	indeks punktu stałego odwzorowania f na zbiorze U
$L(f)$	liczba Lefschetza odwzorowania f
$\text{LCM}(Q)$	najmniejsza wspólna wielokrotność zbioru Q
$\text{MPer}_L(f)$	minimalny zbiór okresów Lefschetza odwzorowania f
$\text{MPer}_{ms}(f)$	homotopijny minimalny zbiór okresów dyfeomorfizmu Morse'a-Smale'a f
M_g	orientowalna powierzchnia zamknięta o genusie g
N_g	nieorientowalna powierzchnia zamknięta o genusie g

$N(f)$	liczba Nielsena odwzorowania f
$NF_r(f)$	liczba Nielsena rzędu r odwzorowania f
$NJD[f]$	liczba Nielsena-Jianga-Dolda odwzorowania f
\mathbb{N}	zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{N}_0	zbiór liczb naturalnych z zerem tj. $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$
$O_f^+(x)$	orbita dodatnia punktu x
$O_f(x)$	orbita całkowita punktu x
$P(f)$	zbiór wszystkich punktów okresowych
$\text{Per}(f)$	zbiór okresów funkcji f
$\text{HPer}(f)$	minimalny zbiór okresów funkcji f w klasie homotopii
(f, \bar{f})	funkcja par
\bar{A}	zbiór postaci $\{\text{LCM}(Q) : Q \subset A\}$
$\text{tr}(A)$	ślad macierzy A
$\sigma(A)$	spektrum (in. widmo, zbiór wartości własnych) macierzy A
$X \# Y$	suma spójna przestrzeni X i Y
$\text{reg}_k(n)$	ciąg przyjmujący wartość k na miejscach o indeksie podzielnym przez k tj. $(0, \dots, 0, \underbrace{k}_{k-te}, 0, \dots, 0, \underbrace{k}_{2k-te}, \dots)$
$\mu(n)$	funkcja Möbiusa
$\varphi(n)$	funkcja Eulera
$f \sim g$	f jest homotopijne z g
$f \stackrel{s}{\sim} g$	f jest homotopijne z g w sposób gładki

1.2 Euklidesowe retrakty otoczeniowe

W tym rozdziale wprowadzimy definicję klasy przestrzeni tzw. euklidesowych retraktów otoczeniowych (w skrócie będziemy pisać ENR), która zawiera w sobie wszystkie przestrzenie, rozpatrywane w niniejszej rozprawie, m.in. rozmaitości z brzegiem i bez brzegu (w szczególności gładkie).

Definicja 1.1. *Mówimy, że X jest retraktem przestrzeni Y , jeśli istnieją funkcje ciągle $r: Y \rightarrow X$ i $s: X \rightarrow Y$ takie, że $rs = \text{id}_X$. Funkcję r nazywamy retrakcją. Zauważmy, że funkcja r musi być surjekcją, a s musi być różnowartościowa.*

Definicja 1.2. *Przestrzeń X nazywamy euklidesowym retraktem otoczeniowym, jeśli jest retraktem otwartego podzbioru przestrzeni euklidesowej. O takich przestrzeniach będziemy mówili, że są ENR'ami (ang. Euclidean Neighborhood Retract).*

Poniżej przedstawimy lemat, dzięki któremu będziemy mieli pewność, że euklidesowe retrakty otoczeniowe, zawierają wszystkie przestrzenie, które będziemy badali w niniejszej rozprawie.

Lemat 1.3 (Twierdzenie 2.2.13 [66]). *Każda rozmaitość (w szczególności rozmaitość gładka) należy do klasy euklidesowych retraktów otoczeniowych.*

1.3 Indeks punktu stałego

Jednym z podstawowych pojęć w teorii punktów stałych jest indeks punktu stałego. Rozpocznijmy od przedstawienia definicji stopnia topologicznego dla rozmaitości, a

następnie powiążemy ją z indeksem punktu stałego (na podstawie pracy J. Jezierskiego i W. Marzantowicza [67]). Następnie zdefiniujemy indeks dla szerokiej klasy przestrzeni tzw. euklidesowych retraktów otoczeniowych i podamy jego własności.

Definicja 1.4. Niech X będzie zbiorem oraz $f: X \rightarrow X$ funkcją. Złożenie

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ razy}} \quad (n\text{-krotne złożenie funkcji})$$

nazywamy n -tą iteracją funkcji f .

Orbitą (dodatnią) punktu $x \in X$ nazywamy zbiór $O_f^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$. Jeśli f jest bijekcją, to orbitą (pełną) punktu x nazywamy zbiór $O_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$.

Definicja 1.5. Niech X będzie zbiorem oraz $f: X \rightarrow X$ funkcją.

Punkt $x \in X$ nazywamy punktem stałym odwzorowania f , jeśli $f(x) = x$. Zbiór wszystkich punktów stałych odwzorowania f będziemy oznaczać jako $\text{Fix}(f) = \{x \in X : f(x) = x\}$.

Punkt $x \in X$ nazywamy punktem okresowym o okresie $n \in \mathbb{N}_0$, jeśli $f^n(x) = x$. Zbiór punktów okresowych oznaczamy jako $P(f) = \{x \in X : \exists_{n \in \mathbb{N}_0} f^n(x) = x\}$.

Okres n jest okresem minimalnym punktu okresowego $x \in X$, jeśli $f^n(x) = x$ oraz $f^m(x) \neq x$ dla każdej liczby naturalnej $m < n$. Zbiór wszystkich okresów minimalnych funkcji f oznaczamy jako $\text{Per}(f) = \{n \in \mathbb{N} : \exists_{x \in X} f^n(x) = x \wedge \forall_{m < n} f^m(x) \neq x\}$.

Przejdźmy teraz do zdefiniowania stopnia topologicznego. Załóżmy, że $U \subset \mathbb{R}^n$ jest podzbiorem otwartym oraz $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem takim, że $f^{-1}(\{0\})$ jest zbiorem zwartym. Wybierzmy orientację w przestrzeni \mathbb{R}^n poprzez wzięcie generatora $z_0 \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z})$. Ponieważ zbiór $f^{-1}(\{0\})$ jest zbiorem zwartym, możemy zdefiniować orientację wzdłuż tego zbioru i oznaczyć jako $z_{f^{-1}(0)} \in H_n(U, U \setminus f^{-1}(\{0\}); \mathbb{Z}) = H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\{0\}); \mathbb{Z})$.

Zauważmy, że funkcja f indukuje homomorfizm n -tej homologii relatywnej w postaci

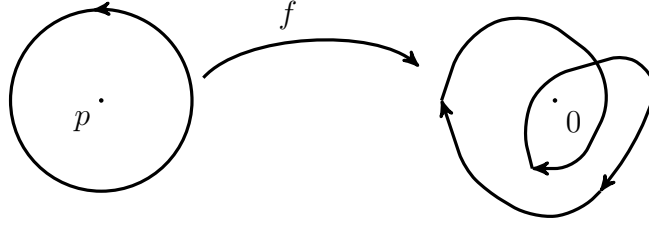
$$f_{*n}: H_n(U, U \setminus f^{-1}(\{0\}); \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

W związku z tym, dla dowolnego $z \in H_n(U, U \setminus f^{-1}(\{0\}); \mathbb{Z})$ homomorfizm przyjmuje wartość $f_{*n}(z) = dz_0$, gdzie $d \in \mathbb{Z}$.

Definicja 1.6. Niech U będzie otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n , $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ oraz $f^{-1}(\{0\})$. Stopniem topologicznym nazywamy liczbę $d \in \mathbb{Z}$ taką, że $f_*(z_{f^{-1}(0)}) = dz_0$. Oznaczaemy przez $\text{deg}(f, U)$ lub $\text{deg}(f)$, gdy rozważany zbiór jest oczywisty.

W dalszej części mówiąc o stopniu topologicznym funkcji będziemy używali sformułowania *stopień*, jeśli nie będzie to powodować niejasności.

Przykład 1.7. Intuicyjnie, w \mathbb{R}^2 stopień topologiczny zlicza ilość nawinięć pętli wokół zer funkcji zgodnie z orientacją. Niech $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie funkcją ciągłą oraz $f^{-1}(\{0\}) = \{p\}$, która przeprowadza okrąg wokół punktu p w pętlę, jak na Rysunku 1.7.



Rysunek 1.1: Działanie funkcji f , dla której $\deg(f) = 2$

Ponieważ obraz okręgu wokół punktu p jest pętlą dwukrotnie nawijającą się wokół 0 z orientacją przeciwną, to $\deg(f, p) = -2$.

Definicja stopnia topologicznego bezpośrednio przenosi się na n -wymiarowe, zorientowane rozmaitości zamknięte X, Y oraz funkcję ciągłą $f: X \rightarrow Y$, dla której $f^{-1}(\{0\})$ jest zbiorem zwartym. Orientowalność implikuje, że n -ta grupa homologii jest izomorficzna z \mathbb{Z} , więc możemy wyznaczyć orientację wybierając generator n -tej grupy homologii.

Definicja 1.8. Niech U będzie otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n , $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie funkcją ze zwartym zbiorem punktów stałych $\text{Fix}(f)$. Indeks punktu stałego funkcji f nazywamy liczbę

$$\text{ind}(f, U) := \deg(\text{id} - f, U).$$

Dla zwartego zbioru $K \subset \mathbb{R}^n$ indeks punktu stałego zbioru K $\text{ind}(f, K)$ definiujemy jako indeks zbioru otwartego U takiego, że $K \subset U$ oraz $\text{Fix}(f|_U) = \text{Fix}(f|_K)$. W przypadku, gdy zbiór K jest jednoelementowy ($K = \{p\}$), to indeks punktu stałego zbioru K oznaczamy jako $\text{ind}(f, K) = \text{ind}(f, \{p\}) = \text{ind}(f, p)$.

Powyżej przedstawiliśmy konstrukcję stopnia topologicznego dla zorientowanych jednospójnych rozmaitości zamkniętych, toteż definicję indeksu punktu stałego naturalnie można przenieść na takie przestrzenie. Poniżej przedstawimy konstrukcję indeksu punktu stałego dla szerszej klasy przestrzeni pokrywającej również wspomniane rozmaitości.

Niech X będzie euklidesowym retraktem otoczeniowym oraz $U \subset X$ podzbiorem otwartym. Z definicji ENR (Definicja 1.2), istnieje otoczenie $V \in \mathbb{R}^n$ zbioru X oraz istnieją funkcje ciągłe $r: V \rightarrow X, s: X \rightarrow V$ takie, że $rs = \text{id}_X$. Rozważmy funkcję $sfr|_{r^{-1}(U)}: r^{-1}(U) \rightarrow V$. W celu skrócenia zapisu będziemy ją oznaczać jako $sfr|$.

Lemat 1.9. Zbiory punktów stałych $\text{Fix}(sfr|)$ i $\text{Fix}(f)$ są homeomorficzne.

Dowód. Weźmy $x \in \text{Fix}(f)$. Ponieważ $rs = \text{id}_U$, więc $rs(x) = x$. Wtedy $sfr|(s(x)) = sf(x) = s(x)$, zatem $s(x)$ jest punktem stałym odwzorowania $sfr|$. Z drugiej strony weźmy $x \in \text{Fix}(sfr|)$. Wówczas

$$x = sfr|(x),$$

$$r(x) = rsfr|(x) = fr(x),$$

co oznacza, że $r(x)$ jest punktem stałym odwzorowania f . □

Możemy teraz zdefiniować indeks punktu stałego dla euklidesowych retraktów otoczeniowych.

Definicja 1.10. Niech X będzie ENR'em oraz $U \subset X$ będzie otwartym podzbiorem. Jeśli zbiór punktów stałych funkcji $f: U \rightarrow X$ jest zbiorem zwartym, to indeks punktu stałego definiujemy jako

$$\text{ind}(f, U) := \text{ind}(sfr|_{r^{-1}(U)}, U).$$

Jeśli zbiór $A \subset X$ jest zwartym zbiorem punktów stałych, izolowanym przez otoczenie $W \subset U$, wtedy $\text{ind}(f, A)$ rozumiemy jako $\text{ind}(f, A) = \text{ind}(f, W)$.

W dalszej części przedstawimy najważniejsze własności indeksu punktu stałego. Dowody podanych własności możemy znaleźć w ciągu Lematów 2.2.16 - 2.2.21 [67].

1. (Umiejscowienie).

Niech $U' \subset U$ będzie podzbiorem otwartym. Jeśli $\text{Fix}(f) \subset U'$, wtedy

$$\text{ind}(f, U) = \text{ind}(f, U').$$

2. (Normalizacja).

Niech $\rho: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie funkcją stałą $\rho(x) = x_0$. Wtedy

$$\text{ind}(\rho) = \mathbb{1}_U(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x_0 \in U, \\ 0 & \text{jeśli } x_0 \notin U. \end{cases}$$

3. (Addytywność).

Niech $U_1, U_2 \subset U$ będą otwartymi podzbiorem takimi, że zbiory punktów stałych $\text{Fix}(f|_{U_1}), \text{Fix}(f|_{U_2})$ są zbiorami zwartymi oraz przekrój $U_1 \cap U_2 \cap \text{Fix}(f) = \emptyset$. Wtedy

$$\text{ind}(f, U_1 \cup U_2) = \text{ind}(f, U_1) + \text{ind}(f, U_2).$$

4. (Homotopijna niezmienniczość).

Niech $W \subset \mathbb{R}^n \times [0, 1]$ będzie otwartym podzbiorem. Weźmy funkcję ciągłą $F: W \rightarrow \mathbb{R}^n$, dla której zbiór $\text{Fix } F = \{(x, t) \in W : F(x, t) = x\}$ jest zbiorem zwartym. Wtedy

$$\text{ind}(f_0) = \text{ind}(f_1),$$

gdzie $f_0(x) = F(x, 0), f_1(x) = F(x, 1)$.

5. (Multiplikatywność).

Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n, f': U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ posiadają zwarty zbiór punktów stałych. Zdefiniujmy $f \times f': U \times U' \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, wtedy zachodzi równość

$$\text{ind}(f \times f') = \text{ind}(f)\text{ind}(f').$$

6. (Przemienność).

Niech $U \subset \mathbb{R}^n, U' \subset \mathbb{R}^m$ będą zbiorami otwartymi. Weźmy funkcje $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ i $g: U' \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wtedy złożenia

$$gf: f^{-1}(U') \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad fg: g^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

mają homeomorficzne zbiory punktów stałych. Co więcej, jeśli $\text{Fix}(gf)$ i $\text{Fix}(fg)$ są zbiorami zwartymi, to

$$\text{ind}(fg) = \text{ind}(gf).$$

Twierdzenie 1.11 (Twierdzenie 2.2.22 [67]). *Niech X będzie ENR'em oraz $U \subset X$ podzbiorem otwartym. Istnieje dokładnie jedna funkcja przyporządkowująca każdemu odwzorowaniu $f: U \rightarrow X$ ze zwartym zbiorem punktów stałych $\text{Fix}(f)$, liczbę całkowitą spełniającą własności 1 – 6.*

1.4 Liczba Lefschetza

Niech $A = [a_{ij}]_{d \times d}$ będzie macierzą zespoloną stopnia d , śladem macierzy A nazywamy sumę elementów znajdujących się na jej głównej przekątnej i oznaczamy jako

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^d a_{ii}.$$

Dla każdej macierzy zespolonej A istnieje rozkład Jordana, tj. przedstawienie A w postaci iloczynu trzech macierzy

$$A = PJP^{-1} \Leftrightarrow J = P^{-1}AP,$$

gdzie P jest macierzą nieosobliwą składającą się z wektorów własnych macierzy A , a J jest macierzą w postaci Jordana tj.

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{d-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_d \end{bmatrix}$$

gdzie λ_i to wartości własne macierzy A . Zauważmy, że

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(PJP^{-1}) = \text{tr}(PP^{-1}J) = \text{tr}(J) = \sum_{i=1}^d \lambda_i \quad (1.1)$$

oraz

$$\text{tr}(A^n) = \text{tr}(J^n) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n. \quad (1.2)$$

Przypomnijmy, że homologie ze współczynnikami w pierścieniu R posiadają strukturę R -modułu. Jeśli R jest ciałem, to R -moduł jest przestrzenią liniową nad ciałem R . Oznacza to, że $H_k(X; \mathbb{Q})$ jest przestrzenią liniową, a homomorfizmy $f_{*k}: H_k(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(X; \mathbb{Q})$ oraz $f_*: H_*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(X; \mathbb{Q})$ są odwzorowaniami liniowymi.

Definicja 1.12. *Niech X będzie zwartym wielościanem oraz $f: X \rightarrow X$ funkcją ciągłą. Liczbę Lefschetza funkcji f definiujemy jako*

$$L(f) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(f_{*k}: H_k(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(X; \mathbb{Q})).$$

Analogicznie dla n -tej iteracji funkcji f otrzymujemy

$$L(f^n) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(f_{*k}^n: H_k(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(X; \mathbb{Q})).$$

Uwaga 1.13. Ze wzorów (1.1) oraz (1.2) możemy wywnioskować, że ślady homomorfizmów indukowanych możemy zapisać jako

$$\mathrm{tr}(f_{*k}) = \sum_{i=1}^d \lambda_i,$$

$$\mathrm{tr}(f_{*k}^n) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n,$$

gdzie d jest stopniem macierzy homomorfizmu f_* oraz λ_i są wartościami własnymi liczonymi z wielokrotnościami.

Uwaga 1.14. W Definicji 1.12 możemy zastąpić homomorfizmy homologii przez homomorfizmy kohomologii. Wynika to z faktu, że $H^k(X; \mathbb{Q}) \approx \mathrm{Hom}(H_k(X; \mathbb{Q}), \mathbb{Q})$ dla każdego $0 \leq k \leq \dim X$, a więc $f^{*k}: H^k(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H^k(X; \mathbb{Q})$ jest homomorfizmem dualnym do homomorfizmu f_{*k} . Stąd f^{*k} zadany jest przez macierz transponowaną f_{*k} i zachodzi $\mathrm{tr} f_{*k} = \mathrm{tr} f^{*k}$ dla każdego $0 \leq k \leq \dim X$.

Uwaga 1.15. Zauważmy, że $f_*^n = (f^n)_* = (f_*)^n$ oraz $(f^n)^* = (f^*)^n$.

Twierdzenie 1.16 (Lefschetz, [18]). *Niech X będzie zwartym i skończonym wielościanem oraz $f: X \rightarrow X$ funkcją ciągłą. Jeśli $L(f) \neq 0$, to funkcja f posiada punkt stały.*

Uwaga 1.17. Łatwo zauważyć, że jeśli $L(f^n) \neq 0$, to z Twierdzenia 1.16, f posiada punkt okresowy o okresie n . Nie oznacza to jednak, że n jest okresem minimalnym tego punktu. Jest to ważna uwaga w kontekście kolejnych rozdziałów, w których będziemy poszukiwać metody na pozyskanie zbioru minimalnych okresów funkcji oraz minimalnej liczby punktów okresowych o zadanym okresie.

Twierdzenie 1.18 (Lefschetz-Hopf, [67]). *Niech X będzie zwartym i skończonym wielościanem oraz $f: X \rightarrow X$ będzie funkcją ciągłą, wtedy*

$$L(f^n) = \mathrm{ind}(f^n, X) = \sum_{x \in \mathrm{Fix}(f^n)} \mathrm{ind}(f^n, x),$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Rozdział 2

Rozwinięcie okresowe

W tym rozdziale zdefiniujemy ważną, z punktu widzenia tej pracy, definicję rozwinięcia okresowego funkcji arytmetycznej oraz zbioru okresów algebraicznych. Rozwinięcie okresowe będziemy stosować w odniesieniu do ciągu liczb Lefschetza w Rozdziale 3, dotyczącym minimalnych zbiorów okresów Lefschetza oraz w odniesieniu do ciągu indeksów punktu stałego iteracji w Rozdziałach 4 i 5 dotyczących minimalizacji liczby punktów okresowych w gładkiej klasie homotopii. W tej części opiszemy również kongruencje Dolda oraz ich związek z rozwinięciem okresowym.

2.1 Rozwinięcie okresowe liczb Lefschetza

Definicja 2.1. Ciąg liczb całkowitych $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywamy ciągiem Dolda, jeśli zachodzą następujące kongruencje (tzw. kongruencje Dolda lub relacje Dolda):

$$\sum_{k|n} \mu(k) a_{\frac{n}{k}} \equiv 0 \pmod{n} \text{ dla każdego } n \geq 1, \quad (2.1)$$

gdzie $\mu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest funkcją Möbiusa, zadaną wzorem

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } n = 1, \\ (-1)^k & \text{jeśli } n = p_1 p_2 \cdots p_k \text{ dla różnych liczb pierwszych } p_i, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Twierdzenie 2.2 ([14, 86]). Niech $f: U \rightarrow X$, gdzie $U \subset X$ jest otwartym podzbiorem ENR'a. Załóżmy, że $U_0 = U$, $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$ oraz $P(f)$ jest zbiorem zwartym, wtedy ciąg indeksów punktu stałego iteracji $\{\text{ind}(f^n, U_n)\}_{n=1}^{\infty}$, w szczególności ciąg liczb Lefschetza iteracji $\{L(f^n)\}_{n=1}^{\infty}$, jest ciągiem Dolda.

Ciągi Dolda pełnią ważną rolę, nie tylko z punktu widzenia układów dynamicznych, ale również z punktu widzenia teorii liczb (por. [3, 40, 27]). Okazuje się, że istnieje wygodny sposób zapisywania ciągów Dolda za pomocą tak zwanego rozwinięcia okresowego, tzn. zapisując ciąg za pomocą kombinacji pewnych bazowych ciągów okresowych zwanych regami, które zdefiniujemy poniżej.

Definicja 2.3. Niech k będzie wybraną liczbą naturalną. Definiujemy funkcję arytmetyczną reg_k jako

$$\text{reg}_k(n) = \begin{cases} k & \text{jeśli } k \mid n, \\ 0 & \text{jeśli } k \nmid n. \end{cases}$$

Zatem reg_k jest ciągiem okresowym postaci $(0, \dots, 0, k, 0, \dots, 0, k, \dots)$, gdzie niezerowe elementy znajdują się na miejscach, których indeksy podzielne są przez k .

Definicja 2.4. Rozwinięciem okresowym dowolnej funkcji arytmetycznej $u(n)$ nazywamy przedstawienie jej jako kombinacji ciągów bazowych reg_k tj.

$$u(n) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{reg}_k(n).$$

Zbiór $AP(f) = \{i : b_i \neq 0\}$ nazywamy zbiorem okresów algebraicznych. Oznaczamy $AP_r(f) = \{i : b_i \neq 0\} \cap \text{Div}(r)$.

Przykład 2.5. Funkcję arytmetyczną $f(n) = (-1)^n$ możemy zapisać jako $f(n) = \text{reg}_1(n) - \text{reg}_2(n)$, a jej zbiór okresów algebraicznych jest równy $AP(f) = \{1, 2\}$.

Przykładowe funkcje arytmetyczne, których rozwinięcia okresowe pojawiają się w tej pracy, to ciąg iteracji liczb Lefschetza $\{L(f^n)\}_{n=1}^{\infty}$, ciąg indeksów punktu stałego p iteracji $\{\text{ind}(f^n, p)\}_{n=1}^{\infty}$ oraz ciąg śladów homomorfizmów indukowanych $\{\text{tr}(f_*^n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Przez ostatnie 30 lat, zbiór okresów algebraicznych $AP_r(f)$ był rozpatrywany w wielu kontekstach. Współczynniki zawierają wartościową informację o strukturze punktów okresowych. Zbiór ten był rozważany w szczególności dla:

- odwzorowań transwersalnych zwartej rozmaitości, których homologie są równe odpowiednio $H_i(M; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ dla $i \in I \cup \{0\}$ oraz $H_i(M; \mathbb{Q}) = \{0\}$ w pozostałych przypadkach, gdzie $I \subset \mathbb{N}$ jest zbiorem o mocy 1, 2 lub 3 [79],
- odwzorowań transwersalnych zwartej rozmaitości, których homologie są równe $H_0(M; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $H_1(M; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$, $H_k(M; \mathbb{Q}) = \{0\}$, dla $k \neq 0, 1$ [53],
- odwzorowań transwersalnych pewnych przykładów prostych wymiernych przestrzeni Hopfa [59] (*ang. simple rational Hopf spaces*) oraz funkcji klasy C^1 wymiernych zewnętrznych przestrzeni Hopfa i prostych wymiernych przestrzeni Hopfa (*ang. rational exterior spaces and simple rational Hopf spaces*) [25, 24] (więcej również w [23]),
- odwzorowań holomorficznych pewnych zespolonych rozmaitości [87].

Twierdzenie 2.6 (Propozycja 2.7 w [86]). *Niech u będzie funkcją arytmetyczną. Istnieje dokładnie jedno rozwinięcie okresowe postaci*

$$u(n) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{reg}_k(n). \quad (2.3)$$

Współczynniki rozwinięcia b_k są liczbami wymiernymi danymi wzorem

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) u(k), \quad (2.4)$$

gdzie μ oznacza klasyczną funkcję Möbiusa. Co więcej, ciąg wartości funkcji arytmetycznej $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest całkowitoliczbowy i spełnia kongruencję Dolda wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki rozwinięcia okresowego $b_k \in \mathbb{Z}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

W szczególności Twierdzenie 2.6 zachodzi dla ciągu indeksów punktu stałego iteracji $\{\text{ind}(f^n, U)\}_{n=1}^\infty$ oraz ciągu liczb Lefschetza iteracji $\{L(f^n)\}_{n=1}^\infty$.

Twierdzenie 2.7 (Twierdzenie 2 w [16]). *Niech $\{a_n\}_n$ i $\{b_n\}$ będą ciągami liczb zespolonych. Ciąg $\{a_n\}_n$ jest ciągiem Dolda, którego współczynniki rozwinięcia okresowego tworzą ciąg $\{b_n\}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{b_n}. \quad (2.5)$$

2.2 Rozwinięcia okresowe indeksów iteracji w punktach okresowych dyfeomorfizmów

Dla uproszczenia notacji, oznaczymy pochodną funkcji f w punkcie $x_0 \in \text{Fix}(f)$ jako $D = Df(x_0)$ oraz przez $\sigma(D)$ oznaczymy spektrum pochodnej. Przez σ_+ oznaczamy liczbę rzeczywistych wartości własnych D większych od 1 oraz przez σ_- liczbę rzeczywistych wartości własnych mniejszych niż 1, przy czym wartości własne liczymy z wielokrotnościami.

Definicja 2.8. *Niech $f: M \rightarrow M$ będzie C^1 dyfeomorfizmem rozmaitości M oraz x będzie punktem okresowym o okresie n . Punkt x nazywamy hiperbolicznym, jeśli wszystkie wartości własne pochodnej $Df(x)$ funkcji f w punkcie x są co do modułu różne od 1.*

Będziemy rozważać funkcje hiperboliczne (takie, których wszystkie punkty okresowe są hiperboliczne). Przy powyższych założeniach wiadomo z [12], że dla punktu stałego x_0 zachodzi:

$$\text{ind}(f^n, x_0) = \text{sgn} \det(\text{Id} - D^n) = \begin{cases} (-1)^{\sigma_+} & \text{jeśli } n \text{ jest nieparzyste,} \\ (-1)^{\sigma_+ + \sigma_-} & \text{jeśli } n \text{ jest parzyste.} \end{cases} \quad (2.6)$$

W zależności od parzystości liczb σ_+, σ_- oraz n , otrzymujemy cztery możliwe wartości indeksu:

$$\text{ind}(f^n, x_0) = \begin{cases} \text{reg}_1(n), \\ -\text{reg}_1(n), \\ \text{reg}_1(n) - \text{reg}_2(n), \\ -\text{reg}_1(n) + \text{reg}_2(n). \end{cases} \quad (2.7)$$

Rozważmy punkt x_0 z okresem minimalnym k oraz jego orbitę $O_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\}$. Z (2.7) otrzymujemy cztery możliwości postaci indeksów orbit:

$$\text{ind}(f^n, O_f(x_0)) = \begin{cases} \text{reg}_k(n), \\ -\text{reg}_k(n), \\ \text{reg}_k(n) - \text{reg}_{2k}(n), \\ -\text{reg}_k(n) + \text{reg}_{2k}(n). \end{cases} \quad (2.8)$$

Istnieje wzajemna odpowiedniość pomiędzy ciągami zawartymi w (2.8) oraz postaciami funkcji zeta $Z_{a_n}(t) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} t^n)$ (por. Definicja 3.7), mianowicie zachodzą poniższe relacje.

Twierdzenie 2.9. Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem

$$(A) \text{ dla } a_n = l \operatorname{reg}_k(n), \quad Z_{a_n}(t) = \frac{1}{(1-t^k)^l}.$$

$$(B) \text{ dla } a_n = l(\operatorname{reg}_k(n) - \operatorname{reg}_{2k}(n)), \quad Z_{a_n}(t) = (1+t^k)^l.$$

Dowód. Rozważmy każdy z przypadków osobno.

(A) Niech $a_n = l \operatorname{reg}_k(n)$, z Twierdzenia 2.7 otrzymujemy następującą relację pomiędzy ciągami a_n i b_n :

$$Z_{a_n}(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} t^n\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l \operatorname{reg}_k(n)}{n} t^n\right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-t^n)^{-l \cdot b_n},$$

gdzie $b_n = \frac{1}{n} \sum_{s|n} \mu(s) a_{\frac{n}{s}}$. Z definicji $(\operatorname{reg}_k)_n$ mamy, że b_n jest równe 1 dla $n = k$

oraz 0 w przeciwnym wypadku, co implikuje oczekiwaną formę funkcji zeta $Z_{a_n}(t) = \frac{1}{(1-t^k)^l}$.

(B) Niech $a_n = l(\operatorname{reg}_k(n) - \operatorname{reg}_{2k}(n))$. Korzystając z rezultatów z punktu (A), otrzymujemy

$$\begin{aligned} Z_{a_n}(t) &= \exp\left(l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{reg}_k(n)}{n} t^n\right) \exp\left(-l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{reg}_{2k}(n)}{n} t^n\right) = \frac{(1-t^{2k})^l}{(1-t^k)^l} = \\ &= (1+t^k)^l. \end{aligned}$$

□

2.3 Rozwinięcie okresowe liczb Lefschetza funkcji quasi-unipotentnych

Informacje zawarte w tym podrozdziale będą szczególnie ważne w Rozdziale 3, z uwagi na fakt, że rozważane tam dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a należą do klasy funkcji quasi-unipotentnych, co wynika z Twierdzenia 3.6.

Dla rozważanej klasy funkcji quasi-unipotentnych rozwinięcie okresowe liczb Lefschetza można wyrazić bezpośrednio za pomocą wzoru, który wyprowadzimy poniżej.

Definicja 2.10. Dla dowolnej liczby naturalnej d , d -ty wielomian cyklotomiczny $\omega_d(z)$ definiujemy za pomocą wzoru

$$\omega_d(z) = \prod_{\varepsilon \in U_d} (z - \varepsilon), \quad (2.9)$$

gdzie U_d oznacza zbiór pierwiastków pierwotnych z jedynki stopnia d .

Zauważmy, że wielomian $\omega_d(z)$ jest nierozkładalnym wielomianem stopnia $\varphi(d)$ o współczynnikach całkowitych, gdzie φ jest funkcją Eulera, co oznacza, że $\varphi(d)$ jest równa ilości liczb naturalnych względnie pierwszych z d . Na przykład $\omega_3(z) = \frac{1-z^3}{1-z} = 1+z+z^2$, $\operatorname{Deg}(\omega_3) = 2 = \varphi(3)$, gdzie $\operatorname{Deg}(\omega_3)$ oznacza stopień wielomianu ω_3 .

Definicja 2.11. Funkcję liniową nazywamy *quasi-unipotentną*, gdy jej wartości własne są pierwiastkami pierwotnymi z jedynki. W niniejszej rozprawie funkcję ciągłą $f: M \rightarrow M$ będziemy nazywali *quasi-unipotentą*, jeśli jej homomorfizm indukowany f_* jest *quasi-unipotentny*.

Naszym celem jest wyznaczenie współczynników b_k rozwinięcia okresowego liczb Lefschetza dla iteracji funkcji quasi-unipotentnych.

Niech $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\varphi(d)}$ będą wszystkimi pierwiastkami pierwotnymi z jedności stopnia d . Dla danego d definiujemy

$$L_d(n) = \varepsilon_1^n + \dots + \varepsilon_{\varphi(d)}^n. \quad (2.10)$$

Wielomian cyklotomiczny $\prod_{i=1}^{\varphi(d)} (z - \varepsilon_i)$ posiada całkowitoliczbowe współczynniki, więc $L_d(n)$ można zapisać jako ślad $\text{tr}(A^n)$ pewnej macierzy całkowitoliczbowej A , której wielomian charakterystyczny jest wielomianem cyklotomicznym. Z drugiej strony $\text{tr}(A^n)$ dla macierzy całkowitoliczbowej A zawsze spełnia relacje Dolda (Twierdzenie 3.1.4 w [67]). W konsekwencji, z Twierdzenia 2.6 $L_d(n)$ posiada jednoznaczną reprezentację za pomocą całkowitoliczbowej kombinacji ciągów bazowych reg_k .

Rozważmy funkcję quasi-unipotentą f zwartej rozmaitości M wymiaru m w sobie. Niech $e_i(\lambda)$ będą algebraicznymi wielokrotnościami wartości własnej λ homomorfizmu f_{*i} . Definiujemy

$$e(\lambda) := \sum_{i=0}^m (-1)^i e_i(\lambda).$$

Wartość własną $\lambda \neq 0$ nazywamy *istotną* jeśli $e(\lambda) \neq 0$. W oczywisty sposób jedynie istotne wartości własne mają wkład w wartości ciągu liczb Lefschetza $\{L(f^n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Oznaczmy przez $\sigma_{es}(f)$ zbiór istotnych wartości własnych funkcji f . Definiujemy

$$e(d) = \sum_{\lambda \in U_d \cap \sigma_{es}(f)} e(\lambda).$$

Zauważmy, że istotne pierwiastki pierwotne z jedynki grupują się po $\varphi(d)$ elementów, wnosząc wkład $\frac{e(d)}{\varphi(d)} L_d(n)$ do $L(f^n)$. W rezultacie otrzymujemy

$$L(f^n) = \sum_d \frac{e(d)}{\varphi(d)} L_d(n). \quad (2.11)$$

W konsekwencji, aby znaleźć rozwinięcie okresowe $\{L(f^n)\}_{n=1}^{\infty}$, wystarczy znaleźć rozwinięcie okresowe każdego z $\{L_d(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Przedstawmy $\{L_d(n)\}_{n=1}^{\infty}$ jako całkowitoliczbową kombinację ciągów bazowych reg_k :

$$L_d(n) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^d \text{reg}_k(n), \quad (2.12)$$

gdzie b_k^d są liczbami całkowitymi, $d \in \mathbb{N}$ jest ustalone.

Poniższe twierdzenie pozwala na znalezienie wartości współczynników b_k^d , więc również na znalezienie rozwinięcia okresowego ciągu $\{L_d(n)\}_{n=1}^{\infty}$. Dowód elementarny został przedstawiony w [38], poniżej przestawiony zostanie dużo prostszy i krótszy dowód bazujący na Twierdzeniu 2.7.

Twierdzenie 2.12. Współczynniki b_k^d rozwinięcia okresowego ciągu liczb Lefschetza $\{L_d(n)\}_{n=1}^\infty$ są równe:

$$b_k^d = \begin{cases} \mu\left(\frac{d}{k}\right) & \text{jeśli } k \mid d, \\ 0 & \text{jeśli } k \nmid d. \end{cases} \quad (2.13)$$

Dowód. Niech $a_n = \sum_{i=1}^r m_i \lambda_i^n$, gdzie m_i są liczbami całkowitymi oraz λ_i należą do liczb zespolonych, wtedy (por. [67] (3.1.26)):

$$Z_{a_n}(z) = \prod_{i=1}^r (1 - \lambda_i z)^{-m_i}.$$

Z drugiej strony w naszym przypadku $\lambda_i \in U(d)$, gdzie $U(d)$ oznacza zbiór wszystkich możliwych pierwiastków pierwotnych z jedności stopnia d oraz $r = \varphi(d)$. Ponieważ $\varphi(d)$ jest zawsze parzyste dla $d > 1$, $U(d)$ jest zamknięte ze względu na działanie odwrotności oraz w naszym przypadku $m_i = 1$, to otrzymujemy:

$$Z_{L_d(n)}(z) = \prod_{i=1}^{\varphi(d)} (\lambda_i z - 1)^{-1} = \prod_{i=1}^{\varphi(d)} \left(z - \frac{1}{\lambda_i}\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{\varphi(d)} (z - \lambda_i)^{-1} = \omega_d(z)^{-1}.$$

Z drugiej strony, zachodzi następujący, dobrze znany fakt (por. Podrozdział 13.6, ćw.7 [19]):

$$\omega_d(z)^{-1} = \prod_{k \mid d} (1 - z^k)^{-\mu\left(\frac{d}{k}\right)}. \quad (2.14)$$

Stosując wzór (2.5) dla $a_n = L_d(n)$ otrzymujemy, że

$$Z_{L_d(n)}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^k)^{-b_k^d}. \quad (2.15)$$

Porównując wzory (2.14) oraz (2.15) otrzymujemy równość (2.13). \square

Wyprowadziliśmy wzór, dzięki któremu możemy bezpośrednio znaleźć rozwinięcie ciągu liczb Lefschetza ze wzoru (2.11). Pozostało pokazać, że w przypadku funkcji quasi-unipotentnych rozwinięcie jest skończone, więc można je wyznaczyć w skończonej liczbie kroków.

Lemat 2.13. Niech M będzie zwartą rozmaitością oraz $f: M \rightarrow M$ będzie funkcją quasi-unipotentną, wtedy ciąg liczb Lefschetza jest okresowy.

Dowód. Niech $\sigma(f)$ będzie zbiorem wartości własnych funkcji f oraz $\mathbb{D} = \{d \in \mathbb{N} : \lambda^d = 1 \wedge \forall_{0 < n < d} \lambda^n \neq 1\}$ będzie zbiorem stopni pierwiastków z jedynki zawartych w $\sigma(f)$. Oznaczmy $s = \text{LCM}(\mathbb{D})$. Zauważmy, że dla każdego $\lambda \in \sigma(f)$ mamy $\lambda^s = 1$, więc z Uwagi 1.13 mamy $L(f^{s+k}) = L(f^k)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. \square

Wniosek 2.14. Przy założeniach Lematu 3.9 rozwinięcie okresowe ciągu liczb Lefschetza jest skończone tj. istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $L(f^n) = \sum_{i=1}^N b_i \text{reg}_i(n)$.

Rozdział 3

Minimalny zbiór okresów Lefschetza

Rozważmy dyskretny topologiczny układ dynamiczny (X, f) wraz z klasą homotopii funkcji f . Naturalnym pytaniem jest, będzie jest minimalny zbiór okresów $\text{HPer}(f) = \bigcap_{g \sim f} \text{Per}(g)$ w klasie homotopii funkcji f . Zbiór $\text{HPer}(f)$ jest niezmiennikiem homotopijnym, więc nie zmienia się pod wpływem małych zaburzeń funkcji f . Stąd możemy powiedzieć, że minimalny zbiór okresów w klasie homotopii daje nam informację o sztywnej (niezmiennej) części dynamiki funkcji f . Oczywiście zachodzi $\text{HPer}(f) \subset \text{Per}(f)$. W ogólności $\text{HPer}(f)$ jest właściwym podzbiorem $\text{Per}(f)$. Na przykład dla $f: S^1 \rightarrow S^1$ zadanej poprzez sprzężenie $f(z) = \bar{z}$, mamy $\text{Per}(f) = \{1, 2\}$, ale $\text{HPer}(f) = \{1\}$.

Zbiór $\text{HPer}(f)$ był po raz pierwszy badany w pracach L. S. Efremovej [20] oraz w artykule L. Blocka, J. Guckenheimera, M. Misiurewicza, L. S. Younga [7], którzy przedstawili pełną charakteryzację $\text{HPer}(f)$ dla funkcji zdefiniowanych na S^1 . Wynik ten następnie uogólniony został dla wielowymiarowych torusów (B. Jiang, J. Llibre [69]). Kolejne przypadki homotopijnych minimalnych zbiorów okresów były rozpatrywane w klasie funkcji ciągłych dla: nilrozmaitości [66, 74], specjalnych klas solv-rozmaitości z Sol^3 [64, 75] oraz Sol_1^4 geometrią [71]. Ten sam problem był rozważany dla rzeczywistych przestrzeni rzutowych [62] oraz butelki Kleina [65, 72, 73, 77]. W odróżnieniu od rozważania zbioru $\text{HPer}(f)$ dla specjalnych klas rozmaitości, w [78] J. Llibre oraz W. Marzantowicz podali pełen opis homotopijnego minimalnego zbioru okresów dla funkcji holomorficznych zdefiniowanych na zwartych powierzchniach Riemanna.

Od 2007 roku prezentowany problem jest intensywnie badany dla pewnej klasy odwzorowań gładkich, jaką są dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a $f: M \rightarrow M$, zdefiniowane na zwartej rozmaitości M .

3.1 Dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a

Przez $\text{Diff}(M)$ będziemy oznaczali przestrzeń C^1 dyfeomorfizmów zwartej rozmaitości M w siebie z metryką Riemanna

$$d(f, g) = \sup_{x \in M} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in M} |Df(x) - Dg(x)|.$$

Mówimy, że dyfeomorfizm $f \in \text{Diff}(M)$ jest *strukturalnie stabilny*, jeśli istnieje otoczenie $f \in U \subset \text{Diff}(M)$ takie, że dla każdego $g \in U$ funkcje f i g są topologicznie

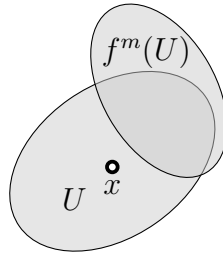
sprzężone.

Dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a są ważną klasą dyfeomorfizmów strukturalnie stabilnych [89]. Oznacza to, że relatywnie prosta struktura orbit, którą posiadają (skończenie wiele punktów okresowych, wszystkich hiperbolicznych i żadnych innych punktów powracających) jest zachowywana pod wpływem małych C^1 zaburzeń.

Definicja 3.1 (Punkt niebłądzący). *Niech $f: X \rightarrow X$ będzie funkcją przestrzeni topologicznej X . Punkt $x \in X$ nazywamy niebłądzącym, jeśli*

$$\forall_{\substack{U \subset X \\ U \text{-otwarty} \\ x \in U}} \exists_{\substack{m > 1 \\ m \in \mathbb{N}}} f^m(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Zbiór wszystkich punktów niebłądzących funkcji f będziemy oznaczać przez $\Omega(f)$



Rysunek 3.1: Wizualizacja definicji punktu niebłądzącego.

Lemat 3.2. *Niech $f: X \rightarrow X$ będzie funkcją ciągłą przestrzeni topologicznej X oraz $x \in \Omega(f)$ będzie punktem niebłądzącym, wtedy orbita $O_f^+(x) \subset \Omega(f)$.*

Dowód. Weźmy dowolny punkt niebłądzący $x \in \Omega(f)$. Wystarczy pokazać, że $f(x) \in \Omega(f)$. Niech $V \subset X$ będzie dowolnym otoczeniem punktu $f(x)$, wtedy z ciągłości funkcji f , zbiór $W = f^{-1}(V)$ jest zbiorem otwartym oraz $x \in W$. Ponieważ x jest niebłądzący, to istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że

$$f^m(W) \cap W \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \neq f(f^m(W) \cap W) \subset f^m(f(W)) \cap f(W) = f^m(V) \cap V.$$

Stąd $f^m(V) \cap V \neq \emptyset$, więc $f(x)$ jest punktem niebłądzącym. Zatem cała orbita $O_f^+(x)$ składa się z punktów niebłądzących. \square

Definicja 3.3 (Stabilny/niestabilny zbiór). *Niech X będzie przestrzenią topologiczną, $f: X \rightarrow X$ będzie homeomorfizmem oraz $x \in X$ będzie punktem o okresie minimalnym k . Stabilnym zbiorem punktu x nazywamy zbiór*

$$W^s(x) = \{y \in X : f^{kn}(y) \rightarrow x \text{ gdy } n \rightarrow \infty\},$$

niestabilnym zbiorem punktu x nazywamy zbiór

$$W^u(x) = \{y \in X : f^{kn}(y) \rightarrow x \text{ gdy } n \rightarrow -\infty\}.$$

Definicja 3.4 (Dyfeomorfizm Morse'a-Smale'a). *Niech M będzie zwartą rozmaitością. Dyfeomorfizm $f: M \rightarrow M$ nazywamy dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a, jeśli*

- (i) *zbiór $\Omega(f)$ wszystkich punktów niebłądzących jest skończony,*

- (ii) wszystkie punkty okresowe są hiperboliczne (Definicja 2.8),
 (iii) dla każdych $x, y \in P(f)$, $W^s(x)$ oraz $W^u(y)$ tną się transversalnie.

Lemat 3.5. Z warunku (i) otrzymujemy $\Omega(f) = P(f)$.

Dowód. Niech $f: M \rightarrow M$ będzie dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a. Oczywiście punkty okresowe są punktami niebłądzącymi tj. $P(f) \subset \Omega(f)$. Pokażmy, że $\Omega(f) \setminus P(f) = \emptyset$. Ponieważ f jest dyfeomorfizmem, to orbita $O_f^+(x)$ dowolnego punktu $x \in M$ jest skończona w przypadku, gdy x jest okresowy lub nieskończona w pozostałych przypadkach. Załóżmy, że istnieje punkt $x \in \Omega(f) \setminus P(f)$, wtedy orbita $O_f^+(x)$ jest nieskończona oraz z Lematu 3.2 $O_f^+(x) \subset \Omega(f)$. Oznacza to, że zbiór $\Omega(f)$ jest nieskończony, co jest sprzeczne z warunkiem (i) Definicji 3.4, więc $\Omega(f) \setminus P(f) = \emptyset$. \square

Zbiór punktów niebłądzących dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a składa się wyłącznie z punktów okresowych. Naturalnym jest więc pytać, jak wygląda minimalny zbiór okresów w klasie dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a tzn. $MPer_{ms}(f) = \bigcap_{f \sim g} Per(g)$, gdzie g przebiega po wszystkich dyfeomorfizmach Morse'a-Smale'a zdefiniowanych na rozmaitości M . Z definicji wynika, że $HPer(f) \subset MPer_{ms}(f) \subset Per(f)$.

Lemat 3.6 (Shub 1971 [92]). Niech f będzie dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a zwartej rozmaitości M . Wówczas f_* jest funkcją quasi-unipotentną, tzn. wszystkie wartości własne f_* są pierwiastkami z jedynki.

3.2 Funkcja zeta Lefschetza

Definicja 3.7 (Funkcja zeta). Niech dany będzie ciąg $\{a_n\}_n$ liczb całkowitych, funkcję zeta nazywać będziemy funkcję zdefiniowaną jako

$$Z_{a_n}(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} t^n\right). \quad (3.1)$$

W przypadku, gdy dana jest funkcja $f: X \rightarrow X$ oraz jej ciąg liczb Lefschetza $\{L(f^n)\}_{n=1}^{\infty}$, to funkcję zeta Lefschetza analogicznie nazywamy funkcję postaci

$$Z_f(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(f^n)}{n} t^n\right). \quad (3.2)$$

Uwaga 3.8 (Wzór 2.11 [1]). Alternatywna postać funkcji zeta Lefschetza może być uzyskana poprzez użycie wartości własnych homomorfizmu indukowanego f_* , mianowicie jeśli λ_i jest wartością własną o krotności k_i , to

$$Z_f(t) = \prod_i (1 - \lambda_i z)^{(-1)^{m_i+1} k_i}, \quad (3.3)$$

gdzie m_i oznacza indeks grupy homologii powiązanej z λ_i .

Niech M będzie gładką rozmaitością oraz x będzie hiperbolicznym punktem p -okresowym funkcji $f: M \rightarrow M$. Oznaczmy przez E_x^{un} (niestabilną) podprzestrzeń przestrzeni stycznej $T_x M$ rozpiętej przez wektory własne macierzy pochodnej Df_x

odpowiadające wartościom własnym co do modułu większym od 1. Niech $O_f(x)$ będzie orbitą punktu x , definiujemy u jako wymiar niestabilnej podprzestrzeni stycznej $u = \dim E_x^{un}$ oraz Δ jako typ orientacji orbity $O_f(x)$ równy $+1$, gdy Df_x zachowuje orientację oraz -1 , gdy zmienia orientację.

Przez Σ będziemy oznaczać *dane okresowe* funkcji f , tzn. zbiór wszystkich trójek (p, u, Δ) odpowiadających orbitom okresowym f .

Twierdzenie 3.9 (Franks [21]). *Niech M będzie zamkniętą rozmaitością, a funkcja $f: M \rightarrow M$ będzie klasy C^1 ze skończoną liczbą hiperbolicznych punktów okresowych, wtedy*

$$Z_f(t) = \prod_{(p,u,\Delta) \in \Sigma} (1 - \Delta t^p)^{(-1)^{u+1}}, \quad (3.4)$$

gdzie (p, u, Δ) należą do danych okresowych f .

Funkcje gładkie zdefiniowane na domkniętych i spójnych rozmaitościach, których funkcja zeta Lefschetza posiada postać (3.4) były analizowane przez Llibre i Sirventę w [80], gdzie zostały nazwane funkcjami typu Franksa. Podobnie ci sami autorzy analizowali również funkcje gładkie ze skończoną liczbą punktów okresowych, wszystkich hiperbolicznych [85].

3.3 Minimalne zbiory okresów Lefschetza

Problem znajdowania minimalnego zbioru okresów w gładkiej klasie homotopii dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a $MPer_{ms}(f)$ został przedstawiony przez J.L.G. Guirao, J. Llibre dla T^2 w [55]. Jest to jedyna praca, w której poza opisem homotopijnych minimalnych zbiorów okresów dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a, przedstawiono również topologiczną realizację zbiorów za pomocą dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a. Nie są znane topologiczne realizacje zbiorów $MPer_{ms}(f)$ w innym przypadku niż wyżej wspomniany T^2 .

Minimalne zbiory okresów Lefschetza były badane dla wielu różnych przestrzeni:

- orientowalne zwarte powierzchnie bez brzegu o genusie g (M_g) [81, 83],
- n - wymiarowy torus T^n [57, 6, 4],
- nieorientowalne zwarte powierzchnie bez brzegu o genusie g (N_g) [82, 39],
- dysk z N otworami [54],
- produkt kartezjański l -wymiarowych sfer $S^l \times \cdots \times S^l$ [5],
- $S^m \times S^n$, $\mathbb{C}P^n$ oraz $\mathbb{H}P^n$ [13].

W ogólności, powyższe rezultaty mogą zostać powtórzone dla quasi-unipotentnych dyfeomorfizmów (Definicja 2.11) ze skończoną liczbą punktów okresowych, wszystkich hiperbolicznych. W artykule [92] Shub udowodnił, że dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a zwartych rozmaitości zawierają się w klasie funkcji quasi-unipotentnych.

Sposób sformułowania definicji minimalnego zbioru okresów Lefschetza spowodował, że dotychczasowe metody badań bazowały na kombinatoryce funkcji zeta

Lefschetza oraz jej własnościach. Aby obliczyć $\text{MPer}_L(f)$, należy znaleźć wszystkie możliwe formy $Z_f(t)$ w postaci zaprezentowanej w Definicji 3.10. Może być to skomplikowane zadanie, szczególnie gdy istnieją relacje pomiędzy wartościami własnymi homomorfizmu indukowanego na pierścieniu kohomologii. Jednakże możliwe jest znalezienie rodziny wszystkich istniejących zbiorów $\text{MPer}_L(f)$ dla dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a rozmaitości z danym pierścieniem kohomologii. Rodziny możliwych $\text{MPer}_L(f)$ zostały obliczone w poszczególnych przypadkach: dla torusów M_g o genusie $g = 1, 2, 3$ (por. [81]), dla torusów T^n o wymiarze $n = 1, 2, 3, 4$ (por. [57]), dla rzeczywistych przestrzeni rzutowych N_g o genusie $g = 1, \dots, 9$ (por. [82]) oraz dla dysku z N otworami, gdzie $N = 1, 2, 3, 4, 5$ (por. [58]). Niemniej jednak obliczenia są nadal skomplikowane i szybko stają się niemożliwe do obliczenia ręcznego. W pracy [39] został przedstawiony prosty algorytm (bazujący na Twierdzeniu 3.10), który łatwo może zostać zaimplementowany. Zbiory danych dla orientowalnych oraz nieorientowalnych zwartych powierzchni bez brzegu o genusie odpowiednio $g = 1, \dots, 20$ oraz $g = 1, \dots, 54$ zostały przedstawione na platformie Most Danych [42, 41].

Definicja 3.10 (Minimalny zbiór okresów Lefschetza). *Niech $f: M \rightarrow M$ będzie dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a zwartej rozmaitości M . Jeśli $Z_f(t) \neq 1$, to minimalny zbiór okresów Lefschetza funkcji f definiujemy jako*

$$\text{MPer}_L(f) := \bigcap \{r_1, \dots, r_{\eta(f)}\},$$

gdzie przecięcie rozważamy po wszystkich możliwych przedstawieniach $Z_f(t)$ w postaci

$$Z_f(t) = \prod_{i=1}^{\eta(f)} (1 + \Delta_i t^{r_i})^{m_i}, \quad (3.5)$$

gdzie $\Delta_i \in \{-1, 1\}$, r_i są dodatnimi liczbami całkowitymi, m_i są niezerowymi liczbami całkowitymi oraz $\eta(f)$ jest liczbą naturalną zależną od funkcji f . Dla $Z_f(t) = 1$ definiujemy $\text{MPer}_L(f) := \emptyset$.

Przykład 3.11. *Weźmy dyfeomorfizm Morse'a-Smale'a $f: N_9 \rightarrow N_9$, dla którego liczba Lefschetza jest postaci*

$$L(f^n) = 1 - ((\varepsilon_5^1)^n + (\varepsilon_5^2)^n + (\varepsilon_5^3)^n + (\varepsilon_5^4)^n) - 2((\varepsilon_6^1)^n + (\varepsilon_6^2)^n),$$

gdzie ε_d^i jest i -tym pierwiastkiem z jedynki stopnia d . Otrzymujemy trzy możliwe postaci funkcji zeta

$$Z_f(t) = \frac{(1+t^3)^2(1-t^5)}{(1-t^2)^2} = \frac{(1+t^3)^2(1-t^5)}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{(1+t^3)^2(1-t^5)}{(1-t)(1+t)(1-t^2)}.$$

Stąd $\text{MPer}_L(f) = \{2, 3, 5\} \cap \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3, 5\} = \{3, 5\}$.

Głównym narzędziem do analizy zbioru $\text{MPer}_L(f)$ jest Twierdzenie 3.9 Franksa.

Lemat 3.12. *Niech $f: M \rightarrow M$ będzie dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a zwartej rozmaitości, wtedy zachodzi następująca inkluzja $\text{MPer}_L(f) \subset \text{MPer}_{ms}(f)$.*

Dowód. Przypomnijmy, że liczba Lefschetza jest niezmiennikiem homotopijnym, więc funkcja zeta zdefiniowana jako

$$Z_f(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(f^n)}{n} t^n\right)$$

również jest niezmiennikiem homotopijnym. Z założenia f jest dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a zwartej rozmaitości M w siebie. Z Lematu 3.5 zbiór punktów okresowych $P(f)$ jest skończony, a z (2) warunku Definicji 3.10 wszystkie punkty okresowe są hiperboliczne, stąd f spełnia założenia Twierdzenia 3.9. Otrzymujemy, że funkcja Z_f ma postać

$$Z_f(t) = \prod_{(p,u,\Delta) \in \Sigma} (1 - \Delta t^p)^{(-1)^{u+1}}, \quad (3.6)$$

gdzie (p, u, Δ) należą do danych okresowych f . Oczywiście dowolne dwie funkcje homotopijne g i f mają taką samą funkcję zeta, ale może pochodzić ona od innych danych okresowych. Rozpatrzmy wszystkie sposoby zapisania funkcji $Z_f(t)$ postaci

$$Z_f(t) = \prod_{i=1}^{\eta(f)} (1 + \Delta_i t^{r_i})^{m_i}, \quad (3.7)$$

gdzie $\Delta_i \in \{-1, 1\}$, $r_i \in \mathbb{N}$ oraz $\eta(f) \in \mathbb{N}$. Oczywiście wśród takich sposobów przedstawienia funkcji Z_f jest również postać pochodząca od (3.6), stąd

$$\text{MPer}_L(f) = \bigcap \{r_1, \dots, r_{\eta(f)}\} \subset \text{Per}(f),$$

gdzie przecięcie rozważamy po wszystkich możliwych przedstawieniach $Z_f(t)$ postaci (3.7). Zauważmy, że jeśli g jest homotopijna do f , to $\text{MPer}_L(g) = \text{MPer}_L(f)$, stąd finalnie otrzymujemy $\text{MPer}_L(f) \subset \text{MPer}_{ms}(f)$. □

3.4 Reprezentacja $\text{MPer}_L(f)$ za pomocą rozwinięcia okresowego

Ze wzoru Lefschetza-Hopfa (Twierdzenie 1.18) możemy przedstawić ciąg liczb Lefschetza za pomocą sumy indeksów punktu stałego w następującej formie

$$L(f^n) = \sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} \text{ind}(f^n, x) = \sum_i \sum_{O \in \text{Orb}_i(f)} \text{ind}(f^n, O), \quad (3.8)$$

gdzie $\text{Orb}_i(f)$ oznacza zbiór i -orbit funkcji f . Ponieważ rozważamy dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a, to ze wzoru (2.8) indeks punktu stałego orbity O jest postaci (2.8). Z powyższego oraz z Wniosku 2.14 wynika, że wzór (2.3) rozwinięcia okresowego ciągu liczb Lefschetza iteracji można zapisać jako skończoną sumę

$$L(f^n) = \sum_{i=1}^{\eta(f)} c_{r_i}^j(n), \quad (3.9)$$

gdzie $\eta(f)$ jest liczbą naturalną zależną od f oraz $c_{r_i}^j$ jest ciągiem liczb całkowitych odpowiadającym indeksowi punktu stałego r_i -orbity przyjmującym jedną z poniższych form dla $j \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$c_{r_i}^j(n) = \begin{cases} \text{reg}_{r_i}(n), & j = 1, \\ -\text{reg}_{r_i}(n), & j = 2, \\ \text{reg}_{r_i}(n) - \text{reg}_{2r_i}(n), & j = 3, \\ -\text{reg}_{r_i}(n) + \text{reg}_{2r_i}(n), & j = 4. \end{cases} \quad (3.10)$$

Lemat 3.13. *Niech $f: M \rightarrow M$ będzie dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a zwartej rozmaitości. Zachodzi następująca równość*

$$\text{MPer}_L(f) = \bigcap \{r_1, r_2, \dots, r_{\eta(f)}\}, \quad (3.11)$$

gdzie przecięcie bierzemy po wszystkich rozwinięciach okresowych $\{L(f^n)\}_{n=1}^\infty$ postaci (3.9) na sumę ciągów postaci (3.10).

Dowód. Weźmy dowolną reprezentację funkcji $Z_f(t)$ postaci (3.22) przedstawionej w definicji $\text{MPer}_L(f)$ tj.

$$Z_f(t) = \prod_{i=1}^{\kappa(f)} (1 + \Delta_i t^{r_i})^{m_i},$$

gdzie $\Delta_i \in \{-1, 1\}$, r_i są dodatnimi liczbami całkowitymi, m_i są niezerowymi liczbami całkowitymi oraz $\kappa(f)$ jest liczbą naturalną zależną od funkcji f . Z Twierdzenia 2.9 otrzymujemy wzajemną jednoznaczność, w której każdemu z czynników postaci $(1 + \Delta_i t^{r_i})^{m_i}$ odpowiada $|m_i|$ ciągów $c_{r_i}^j$ postaci (3.10), gdzie $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Stąd funkcji $Z_f(t)$ odpowiada ciąg liczb Lefschetza $\{L(f^n)\}_{n=1}^\infty$ postaci

$$L(f^n) = \sum_{i=1}^{\kappa(f)} |m_i| c_{r_i}^j(n).$$

Równoważnie, zamiast grupować ciągi po $|m_i|$ elementów, możemy sumować osobno, co nie wpływa na wartości r_i , tym samym nie zmienia zbioru $\text{MPer}_L(f)$.

$$L(f^n) = \underbrace{c_{r_1}^j(n) + c_{r_1}^j(n) + \dots + c_{r_1}^j(n)}_{|m_1|} + c_{r_2}^j(n) + \dots + c_{r_{\kappa(f)}}^j(n) = \sum_{l=1}^{\eta(f)} c_{r_l}^j(n), \quad (3.12)$$

gdzie $\eta(f) = \sum_{i=1}^{\kappa(f)} |m_i|$ oraz

$$\begin{aligned} c_{r_l}^j &= c_{r_1}^j & \text{dla} & & 1 \leq l \leq |m_1|, \\ c_{r_l}^j &= c_{r_2}^j & \text{dla} & & |m_1| + 1 \leq l \leq |m_1| + |m_2|, \\ & \dots & & & \dots \\ c_{r_l}^j &= c_{r_{\kappa(f)}}^j & \text{dla} & & \sum_{i=1}^{\kappa(f)-1} |m_i| + 1 \leq l \leq \eta(f) = \sum_{i=1}^{\kappa(f)} |m_i|. \end{aligned}$$

Finalnie otrzymujemy, że

$$\text{MPer}_L(f) = \bigcap \{r'_1, r'_2, \dots, r'_{\eta(f)}\},$$

gdzie przecięcie bierzemy po wszystkich rozwinięciach okresowych $\{L(f^n)\}_{n=1}^\infty$ postaci (3.12) na sumę ciągów postaci (3.10). \square

Twierdzenie 3.14. *Niech $f: M \rightarrow M$ będzie dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a zwartej rozmaitości, którego ciąg liczb Lefschetza posiada rozwinięcie okresowe postaci $L(f^n) = \sum_{i=1} b_i \text{reg}_i(n)$. Wtedy zachodzi następująca równość*

$$\text{MPer}_L(f) = \{i : b_i \neq 0 \text{ oraz } i \text{ jest liczbą nieparzystą}\} = AP_r(f) \cap (2\mathbb{N} - 1).$$

Dowód. Zauważmy, że $c_{r_i}^j$ mają wkład wyłącznie we współczynniki o indeksach r_i oraz $2r_i$, stąd jeśli $b_k \neq 0$ dla nieparzystego k , to w dowolnej dekompozycji $\{L(f^n)\}_{n=1}^\infty$ na sumę ciągów postaci (3.11) znajdują się c_k^j dla pewnego $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, więc z Lematu 3.13 zachodzi $k \in \text{MPer}_L(f)$.

Pokażemy, że $\text{MPer}(f)$ nie zawiera liczb parzystych. Załóżmy nie wprost, że istnieje parzyste $r_i = 2u$ w $\text{MPer}_L(f)$. Wtedy z Lematu 3.13 dla każdej dekompozycji $\{L(f^n)\}_{n=1}^\infty$ na (3.10), musi pojawić się $c_{2u}^j(n)$ dla pewnego j . Jednakże dla $j = 1$ mamy

$$c_{2u}^1(n) = \text{reg}_{2u}(n) = (\text{reg}_{2u}(n) - \text{reg}_u(n)) + \text{reg}_u(n) = c_u^4(n) + c_u^1(n).$$

Dla $j = 2$ mamy

$$c_{2u}^2(n) = -\text{reg}_{2u}(n) = (\text{reg}_u(n) - \text{reg}_{2u}(n)) - \text{reg}_u(n) = c_u^3(n) + c_u^2(n).$$

Dla $j = 3$ zachodzi

$$\begin{aligned} c_{2u}^3(n) &= \text{reg}_{2u}(n) - \text{reg}_{4u}(n) = (\text{reg}_{2u}(n) - \text{reg}_u(n)) + \text{reg}_u(n) - \text{reg}_{4u}(n) = \\ &= c_u^4(n) + c_u^1(n) + c_{4u}^2(n). \end{aligned}$$

Analogicznie dla $j = 4$

$$\begin{aligned} c_{2u}^4(n) &= -\text{reg}_{2u}(n) + \text{reg}_{4u}(n) = (\text{reg}_u(n) - \text{reg}_{2u}(n)) - \text{reg}_u(n) + \text{reg}_{4u}(n) = \\ &= c_u^3(n) + c_u^2(n) + c_{4u}^1(n). \end{aligned}$$

Finalnie w każdym z przypadków dla $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ pokazaliśmy, że c_{2u}^j można zapisać jako sumę ciągów postaci (3.10) z indeksami różnymi od $2u$, stąd $2u \notin \text{MPer}_L(f)$. \square

Przykład 3.15. *Weźmy $f: N_9 \rightarrow N_9$, dla której ciąg liczb Lefschetza jest dokładnie takiej samej postaci jak w Przykładzie 3.11 tj.*

$$L(f^n) = 1 - L_5(n) - 2L_6(n),$$

$$L_5(n) = (\varepsilon_5^1)^n + (\varepsilon_5^2)^n + (\varepsilon_5^3)^n + (\varepsilon_5^4)^n \quad \text{oraz} \quad L_6(n) = (\varepsilon_6^1)^n + (\varepsilon_6^2)^n,$$

gdzie ε_d^i jest i -tym pierwiastkiem z jedynki stopnia d . Znajdźmy rozwinięcie okresowe ciągów $L_d(n)$ przedstawione w (2.12) obliczając wartości współczynników b_i^d bezpośrednio z Twierdzenia 2.12:

$$\begin{aligned} L_6(n) &= \mu\left(\frac{6}{1}\right)\text{reg}_1(n) + \mu\left(\frac{6}{2}\right)\text{reg}_2(n) + \mu\left(\frac{6}{3}\right)\text{reg}_3(n) + \mu\left(\frac{6}{6}\right)\text{reg}_6(n) = \\ &= \text{reg}_1(n) - \text{reg}_2(n) - \text{reg}_3(n) + \text{reg}_6(n), \\ L_5(n) &= \mu\left(\frac{5}{1}\right)\text{reg}_1(n) + \mu\left(\frac{5}{5}\right)\text{reg}_5(n) = -\text{reg}_1(n) + \text{reg}_5(n). \end{aligned}$$

Otrzymujemy jednoznaczne rozwinięcie okresowe ciągu liczb Lefschetza

$$L(f^n) = 2\text{reg}_2(n) + 2\text{reg}_3(n) - \text{reg}_5(n) - 2\text{reg}_6(n).$$

Stąd $\text{MPer}_L(f) = \{2, 3, 5, 6\} \cap (2\mathbb{N} - 1) = \{3, 5\}$.

Poniżej przedstawimy porównanie dwóch poznanych reprezentacji minimalnych zbiorów okresów Lefschetza.

$Z_f(t)$	reg_k
$Z_f(t) = \prod_{i=1}^{\eta(f)} (1 + \Delta_i t^{r_i})^{m_i}$	$L(f^n) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \text{reg}_i(n)$
$\text{MPer}_L(f) := \cap \{r_1, \dots, r_{\eta(f)}\}$	$\text{MPer}_L(f) = \{i : b_i \neq 0 \text{ oraz } i \text{ jest liczbą nieparzystą}\}$

Tabela 3.1: Porównanie reprezentacji minimalnego zbioru okresów Lefschetza $\text{MPer}_L(f)$

Możemy zauważyć, że powyższy wzór zastępuje niejednoznaczną reprezentację $\text{MPer}_L(f)$, korzystającą z postaci funkcji zeta Lefschetza, przez jednoznaczną reprezentację za pomocą rozwinięcia okresowego ciągu liczb Lefschetza. Co więcej, dla funkcji quasi-unipotentnych (więc również dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a) G. Graff oraz A. Kączkowska [38] przedstawili bezpośredni wzór na współczynniki b_i rozwinięcia okresowego liczb Lefschetza.

3.5 Realizacja zbioru minimalnych okresów Lefschetza na N_g

Przypomnijmy, że N_g jest homeomorficzna z sumą spójną g rzeczywistych powierzchni rzutowych oraz jej grupy homologii są następujące: $H_0(N_g; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $H_2(N_g; \mathbb{Q}) = 0$ oraz

$$H_1(N_g; \mathbb{Q}) = \underbrace{\mathbb{Q} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}}_{g-1}.$$

Problem 3.16 (J. Llibre, V. F. Sirvent [82, 84]). Czy dowolny skończony zbiór nieparzystych liczb naturalnych może być minimalnym zbiorem okresów Lefschetza dla pewnego C^1 dyfeomorfizmu Morse'a-Smale'a zdefiniowanego na nieorientowalnej zwartej powierzchni bez brzegu o genusie g ?

Pokażemy, że nie ma algebraicznych przeszkód z punktu widzenia homologii, które mogłyby zaprzeczyć twierdzącej odpowiedzi na Problem 3.16.

Niech d będzie stopniem pierwiastka pierwotnego z jedynki. Weźmy maksymalne m takie, że $2m - 1 \leq d$ oraz oznaczmy przez c^d wektor współczynników o nieparzystych indeksach rozwinięcia okresowego L_d równy $[b_1^d, b_3^d, \dots, b_{2m-1}^d, 0, \dots]$. Przypomnijmy, że b_k^d są dane za pomocą wzoru (2.13) tzn. $b_k^d = \begin{cases} \mu(\frac{d}{k}) & \text{jeśli } k \mid d, \\ 0 & \text{jeśli } k \nmid d. \end{cases}$ Ponieważ dla funkcji Möbiusa zachodzi równość $\mu(\frac{2d}{k}) = -\mu(\frac{d}{k})$, to dla wektora c^d otrzymujemy

$$c^{2d} = [b_1^{2d}, b_3^{2d}, \dots, b_{2m-1}^{2d}, 0, \dots] = -[b_1^d, b_3^d, \dots, b_{2m-1}^d, 0, \dots] = -c^d \quad (3.13)$$

Twierdzenie 3.17. Zbiór $\mathbb{A}_m = \{c^1, c^3, c^5, \dots, c^{(2m-1)}\}$ składający się z m wektorów stanowi bazę \mathbb{Z}^m nad pierścieniem \mathbb{Z} .

Dowód. Utożsamiamy $c^d = [b_1^d, b_3^d, \dots, b_{2m-1}^d]$ z wektorem współczynników o nieparzystych indeksach rozwinięcia okresowego funkcji $L_d(n)$. Rozważmy macierz A złożoną z wektorów c^i ułożonych wierszami:

$$\begin{array}{l} c^1 \leftrightarrow \text{reg}_1 \\ c^3 \leftrightarrow -\text{reg}_1 + \text{reg}_3 \\ c^5 \leftrightarrow -\text{reg}_1 + \text{reg}_5 \\ \vdots \\ c^{2m-1} \leftrightarrow \dots \end{array} \begin{bmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & \dots & b_{2m-1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Zauważmy, że $b_d^d = \mu\left(\frac{d}{d}\right) = 1$ oraz dla $i > d$ współczynniki $b_i^d = 0$. W konsekwencji macierz A jest macierzą dolnotrójkątną oraz $\det A = 1$, więc zbiór \mathbb{A}_m zawiera m wektorów niezależnych liniowo i stanowi bazę \mathbb{Z}^m nad pierścieniem liczb całkowitych. \square

Przypomnijmy, że liczbę Lefschetza $L(f^n)$ iteracji funkcji f definiujemy jako naprzemienną sumę śladów homomorfizmu indukowanego f_*^n (por. Definicja 1.12). Podobnie możemy zdefiniować liczbę Lefschetza dla abstrakcyjnie zadanego homomorfizmu homologii zwartej rozmaitości M jako

$$L(f_*^n) := \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr} \left(f_*^n : H_k(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(X; \mathbb{Q}) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{reg}_k(n). \quad (3.14)$$

Idąc dalej, analogicznie do Definicji 3.13 mając dane rozwinięcie okresowe $L(f_*^n)$ definiujemy

$$\text{MPer}_L(f_*) = AP_r(f_*) \cap (2\mathbb{N} - 1). \quad (3.15)$$

Zauważmy, że dowolny homomorfizm indukowany dyfeomorfizmu Morse'a-Smale'a $f: N_g \rightarrow N_g$ spełnia warunki:

Warunki 3.5.1.

(i) f_* jest funkcją quasi-unipotentną,

(ii) $f_{*0} = \text{id}$.

Pokażemy, że dla dowolnego skończonego zbioru nieparzystych liczb naturalnych S istnieje $g \in \mathbb{N}$ oraz funkcja quasi-unipotentna $f_*: H_*(N_g; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(N_g; \mathbb{Q})$ spełniająca Warunki 3.5.1 taka, że $\text{MPer}_L(f_*) = S$.

Twierdzenie 3.18. *Dla dowolnego skończonego ciągu m liczb całkowitych $\mathcal{G}_m = \{b_1, b_3, \dots, b_{2m-1}\}$ istnieje funkcja quasi-unipotentna $f_*: H_*(N_g; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(N_g; \mathbb{Q})$, dla której:*

a) $L(f_*) = \text{tr}(f_{*0}^n) - \text{tr}(f_{*1}^n) = - \sum_{i=1}^{2(2m-1)} b_i \text{reg}_i(n),$

b) $\text{MPer}_L(f_*) = \{i : b_i \neq 0 \wedge b_i \in \mathcal{G}_m\}.$

Dowód. a) Ciąg liczb Lefschetza dowolnego odwzorowania $f: N_g \rightarrow N_g$ możemy zapisać w postaci

$$L(f^n) = \text{tr}(f_{*0}^n) - \text{tr}(f_{*1}^n) = 1 - \text{tr}(f_{*1}^n) = \text{reg}_1(n) - \text{tr}(f_{*1}^n).$$

Znajdziemy funkcję f_* , która dla danego ciągu m liczb całkowitych $\mathcal{G}_m = \{b_1, b_3, \dots, b_{2m-1}\}$ będzie posiadała liczby Lefschetza równe

$$L(f_*^n) = - \sum_{i=1}^{2(2m-1)} b_i \text{reg}_i(n) = \underbrace{\text{reg}_1(n)}_{\text{tr}(f_{*0}^n)} - \underbrace{\left((b_1 + 1) \text{reg}_1(n) + \sum_{i=2}^{2(2m-1)} b_i \text{reg}_i(n) \right)}_{\text{tr}(f_{*1}^n)},$$

gdzie b_i dla i nieparzystych są kolejnymi elementami ciągu \mathcal{G}_m . Wartości współczynników b_i dla parzystych i nie potrzebujemy kontrolować, ponieważ nie wpływają na zbiór $\text{MPer}_L(f_*)$ oraz tezę twierdzenia.

Przyjmijmy $f_{*0} = id$. Rozważmy wektor $[b_1 + 1, b_3, \dots, b_{2m-1}]$. Z Twierdzenia 3.17 istnieje jednoznaczna reprezentacja tego wektora w bazie $\{c^1, c^3, \dots, c^{2m-1}\}$ taka, że:

$$[b_1 + 1, b_3, \dots, b_{2m-1}] = \sum_{i=1}^m m_i c^{2i-1} = \sum_{i=1}^m |m_i| c^{s(i)}$$

dla $s(i) = \begin{cases} 2i - 1 & \text{jeśli } m_i > 0, \\ 2(2i - 1) & \text{jeśli } m_i < 0, \end{cases}$ gdzie w ostatniej równości używamy relacji $c^k = -c^{2k}$ (3.13). Teraz możemy zdefiniować homomorfizm f_{*1} reprezentowany przez macierz diagonalną wymiaru

$$g - 1 = \sum_{i=1}^m |m_i| \varphi(2i - 1), \quad (3.16)$$

która zawiera na przekątnej $|m_i|$ kopii wszystkich pierwiastków pierwotnych z jedności stopnia $(2i - 1)$, gdy $m_i \geq 0$ oraz $|m_i|$ kopii wszystkich pierwiastków pierwotnych z jedności stopnia $2(2i - 1)$, gdy $m_i < 0$, gdzie $i = 1, \dots, m$.

b) Weźmy funkcję quasi-unipotentną f_* , której konstrukcja została przedstawiona w punkcie a), wtedy $L(f_*^n) = - \sum_{i=1}^{2(2m-1)} b_i \text{reg}_i(n)$. Z Twierdzenia 3.14 otrzymujemy, że $\text{MPer}_L(f)$ składa się z nieparzystych indeksów i niezerowych współczynników b_i tj.

$$\text{MPer}_L(f_*) = \{i : b_i \neq 0 \wedge b_i \in \mathcal{G}_m\}.$$

□

Uwaga 3.19. Zauważmy, że rozwiązanie Problemu 3.16 pokrywa się z punktem b) Twierdzenia 3.18, natomiast wynik zawarty w punkcie a) jest bardziej ogólny.

Co więcej, Twierdzenie 3.18 podaje ograniczenie dla wymiaru realizacji (3.19) jak i ograniczenie na najwyższy pierwiastek pierwotny z jedyńki $(2(2m - 1))$ potrzebny do zrealizowania zadanego zbioru jako $\text{MPer}_L(f)$.

Wniosek 3.20. Funkcja zeta Lefschetza realizacji f_* jest dana za pomocą wzoru:

$$Z_{f_*}(t) = \frac{1}{t-1} \prod_i \left(\prod_{q|s(i)} (1-z^q)^{-\mu\left(\frac{s(i)}{q}\right)} \right)^{|m_i|}. \quad (3.17)$$

Zauważmy, że $Z_{f_*}(t) = Z_{l_n}(t)$, gdzie $l_n = 1 - \sum_i |m_i| L_{s(i)}(n)$. Zatem

$$Z_{f_*}(t) = \frac{1}{t-1} \prod_i \left(Z_{L_{s(i)}}(t) \right)^{|m_i|}$$

oraz z Twierdzenia 2.15 otrzymujemy wzór (3.17).

Uwaga 3.21. Wciąż istnieje „topologiczna” część Problemu 3.16, która nie została rozwiązana. Mianowicie, pozostaje otwarte pytanie, czy każda funkcja quasi-unipotentna f_* przedstawiona w Twierdzeniu 3.18 jest homomorfizmem indukowanym pewnego dyfeomorfizmu Morse’a-Smale’a określonego na N_g ?

3.6 Realizacja zbioru minimalnych okresów Lefschetza na M_g

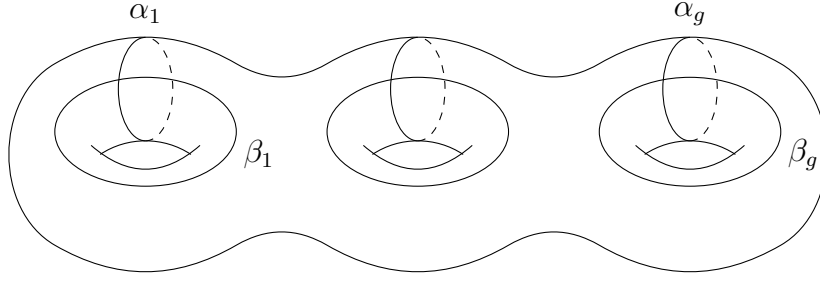
Przypomnijmy, że przestrzeń M_g jest homeomorficzna z sumą spójną g torusów i jej grupy homologii są równe: $H_0(M_g; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $H_2(M_g; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ oraz

$$H_1(M_g; \mathbb{Q}) = \underbrace{\mathbb{Q} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}}_{2g}.$$

W przeciwieństwie do nieorientowalnej powierzchni zamkniętej N_g , o orientowalnej powierzchni zamkniętej M_g możemy powiedzieć więcej, rozważając pierścień kohomologii. Poniższe twierdzenie zawiera informacje o relacjach pomiędzy generatorami kohomologii, a tym samym wartościami własnymi homomorfizmu f^* . Jak już wspominaliśmy w Uwadze 1.14, wartości własne homomorfizmu homologii $f_*: H_*(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(M; \mathbb{Q})$ są takie same jak wartości homomorfizmu kohomologii $f^*: H^*(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(M; \mathbb{Q})$.

Twierdzenie 3.22 (por. Twierdzenie 2.4 [90]). *Niech M_g będzie orientowalną zwartą powierzchnią zamkniętą bez brzegu o genusie g , wtedy pierścień kohomologii wygląda następująco:*

- $H^1(M_g; \mathbb{Q})$ posiada bazę $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ taką, że $\alpha_i \smile \alpha_j = 0$, $\beta_i \smile \beta_j = 0$ dla dowolnego $i, j \in \{1, \dots, g\}$ oraz $\alpha_i \smile \beta_j = 0$ dla $i \neq j$,
- $H^2(M_g; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ posiada bazę złożoną z jednego generatora $\gamma = \alpha_i \smile \beta_i$ dla każdego $i \in \{1, \dots, g\}$ oraz generatorów α_i, β_i pierwszej grupy kohomologii.



Rysunek 3.2: Przestrzeń M_g z oznaczonymi generatorami pierścienia kohomologii α_i oraz β_i

Z relacji pomiędzy generatorami pierścienia kohomologii możemy wyciągnąć ważne wnioski dotyczące wartości własnych homomorfizmów indukowanych. Niech $f: M_g \rightarrow M_g$ będzie dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a oraz $\lambda_i, \hat{\lambda}_i$ będą wartościami własnymi odpowiadającymi generatorom α_i, β_i . Z własności homomorfizmu kohomologii dla cup produktu:

$$f^{*2}(\alpha_i \cup \beta_i) = f^{*1}(\alpha_i) \smile f^{*1}(\beta_i) = \lambda_i \alpha_i \smile \hat{\lambda}_i \beta_i = \lambda_i \hat{\lambda}_i \alpha_i \smile \beta_i \quad (3.18)$$

dla każdego $i \in \{1, \dots, g\}$. Ponieważ f jest dyfeomorfizmem orientowalnej rozmiarowości, to $\lambda_i \hat{\lambda}_i = \pm 1$ w zależności od tego, czy f zachowuje, czy zmienia orientację.

Powyższe rozważania implikują następujące warunki konieczne, jakie musi spełnić homomorfizm indukowany f_* dyfeomorfizmu Morse'a-Smale'a $f: M_g \rightarrow M_g$.

Warunki 3.6.1.

- (i) f_* jest funkcją quasi-unipotentną,
- (ii) $f_{*0} = id$ oraz $f_{*2} = id$ (gdy f zachowuje orientację) lub $f_{*0} = id$ oraz $f_{*2} = -id$ (gdy f zmienia orientację),
- (iii) wartości własne f_{*1} można pogrupować parami w taki sposób, aby ich iloczyn był równy 1 (gdy f zachowuje orientację) lub równy -1 (gdy f zmienia orientację).

W pracach [81, 84] badane były minimalne zbiory okresów Lefschetza dla dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a przestrzeni M_g . W drugiej pozycji sformułowano Problem 3.23 przedstawiony poniżej. Autorzy przeprowadzają, że odpowiedź na pytanie jest twierdząca.

Problem 3.23 (J. Llibre, V. F. Sirvent [84]). Czy dowolny skończony zbiór nieparzystych liczb naturalnych może być minimalnym zbiorem okresów Lefschetza dla pewnego C^1 dyfeomorfizmu Morse'a-Smale'a zdefiniowanego na orientowalnej zwartej powierzchni bez brzegu o genusie g ?

Lemat 3.24. *Pierwiastki pierwotne z jednościi stopnia $d \in \mathbb{N}$ możemy pogrupować parami tak, aby ich iloczyn był równy:*

- (i) 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $d > 2$,
- (ii) -1 wtedy i tylko wtedy, gdy $d > 4$ i $4|d$.

Dowód. Przypomnijmy, że każdy pierwiastek stopnia d z jedyнки możemy zapisać jako $e^{\frac{m}{d}2\pi i}$, dla pewnego $m \in \{1, \dots, d\}$, przy czym pierwiastek jest pierwotny wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{GCD}(m, d) = 1$. Niech $\mathcal{P}(d)$ będzie zbiorem pierwiastków pierwotnych z jedyнки stopnia d :

$$\mathcal{P}(d) = \{e^{\frac{m}{d}2\pi i} : \text{GCD}(m, d) = 1 \wedge m \in \{1, \dots, d\}\}.$$

Rozpocznijmy od dowodu przypadku (i). Ustalmy liczbę naturalną $d > 2$ (dla $d = 1, 2$ mamy tylko jeden pierwiastek pierwotny stopnia d). Jeśli dla pewnego $m \in \{1, \dots, d\}$ mamy $\text{GCD}(m, d) = 1$, to $\text{GCD}(d - m, d) = 1$. Stąd, jeśli $e^{\frac{m}{d}2\pi i} \in \mathcal{P}(d)$, to $e^{\frac{d-m}{d}2\pi i} \in \mathcal{P}(d)$ oraz $e^{\frac{m}{d}2\pi i} \cdot e^{\frac{d-m}{d}2\pi i} = 1$.

Przejdźmy do przypadku (ii) i podobnie jak w poprzednim ustalmy liczbę naturalną $d > 2$. Załóżmy, że dla pewnych $e^{\frac{m}{d}2\pi i}, e^{\frac{n}{d}2\pi i} \in \mathcal{P}(d)$, ich iloczyn równy jest -1 , wtedy (ponieważ $0 < m, n < d$)

$$e^{\frac{m}{d}2\pi i} \cdot e^{\frac{n}{d}2\pi i} = -1 \Leftrightarrow m + n = \frac{d}{2} \vee m + n = \frac{3d}{2}.$$

Stąd d musi być liczbą parzystą. Ponieważ $\text{GCD}(m, d) = 1$ i $\text{GCD}(n, d) = 1$, to m i n są liczbami nieparzystymi. Suma liczb nieparzystych jest parzysta, co dowodzi tego, że $4|d$. Co więcej, istnieją tylko dwa pierwiastki pierwotne stopnia $d = 4$. Są to i oraz $-i$, których iloczyn jest równy 1. Zatem d musi być większe niż 4.

Przejdźmy do udowodnienia implikacji odwrotnej i załóżmy, że $4|d$ i $d > 4$. Weźmy dowolną liczbę $m_1 \in [1, \frac{d}{4}]$ względnie pierwszą z d (wiemy, że taka liczba istnieje, ponieważ $d > 4$). Wtedy oczywiście $e^{\frac{m_1}{d}2\pi i} \in \mathcal{P}(d)$. Pokażmy, że liczba $m_2 = \frac{d}{2} - m_1 \in [\frac{d}{4}, \frac{d}{2}]$ również jest względnie pierwsza z d . W istocie, gdy $4|d$

$$\text{GCD}(m_1, d) = 1 \Leftrightarrow \text{GCD}(m_1, d/2) = 1 \text{ oraz } \text{GCD}(m_1, d/2) = \text{GCD}(-m_1, d/2).$$

Z własności $\text{GCD}(a \bmod b, b) = \text{GCD}(a, b)$ mamy

$$\text{GCD}(-m_1, d/2) = \text{GCD}(d/2 - m_1, d/2) \Rightarrow \text{GCD}(m_2, d) = \text{GCD}(d/2 - m_1, d) = 1,$$

zatem $e^{\frac{m_2}{d}2\pi i} \in \mathcal{P}(d)$. Iloczyn obu wskazanych pierwiastków jest równy -1 :

$$e^{\frac{m_1}{d}2\pi i} \cdot e^{\frac{m_2}{d}2\pi i} = e^{\frac{m_1}{d}2\pi i} \cdot e^{\frac{d/2 - m_1}{d}2\pi i} = e^{\pi i} = -1.$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzajemną odpowiedniość pomiędzy pierwiastkami pochodzącymi od $m \in [1, \frac{d}{2}]$. Dowód dla pierwiastków pierwotnych pochodzących od $m \in [\frac{d}{2}, d]$ jest analogiczny, tj. dla $m_3 \in [\frac{d}{2}, \frac{3d}{4}]$ względnie pierwszej z d wybieramy $m_4 = \frac{3d}{2} - m_3$ i pokazujemy, że iloczyn pierwiastków odpowiadających liczbom m_3, m_4 jest równy -1 . \square

Lemat 3.25. Niech $e^{\frac{m}{d}2\pi i}$ będzie pierwiastkiem pierwotnym z jedyнки nieparzystego stopnia $d > 2$.

- Jeśli $1 \leq m < \frac{d}{2}$, to $e^{\frac{d-2m}{2d}2\pi i}$ jest pierwiastkiem pierwotnym z jedyнки takim, że $e^{\frac{m}{d}2\pi i} \cdot e^{\frac{d-2m}{2d}2\pi i} = -1$.
- Jeśli $\frac{d}{2} < m < d$, to $e^{\frac{3d-2m}{2d}2\pi i}$ jest pierwiastkiem pierwotnym z jedyнки takim, że $e^{\frac{m}{d}2\pi i} \cdot e^{\frac{3d-2m}{2d}2\pi i} = -1$.

Dowód. Niech d będzie dowolną liczbą nieparzystą, weźmy dowolny pierwiastek pierwotny stopnia d postaci $e^{\frac{m}{d}2\pi i}$, gdzie $1 \leq m < \frac{d}{2}$. Oczywiście $\text{GCD}(m, d) = 1$, stąd $m = 1$ lub m jest parzysta oraz $d - 2m$ jest liczbą nieparzystą. Zatem $\text{GCD}(d - 2m, d) = 1$ i $d - 2m \in \{1, \dots, d\}$, więc $e^{\frac{d-2m}{2d}2\pi i}$ jest pierwiastkiem pierwotnym z jedyńki, którego iloczyn z $e^{\frac{m}{d}2\pi i}$ jest równy -1 . Liczba $m \neq \frac{d}{2}$ ponieważ d jest liczbą nieparzystą. Dowód dla $\frac{d}{2} < m < d$ przebiega analogicznie do pierwszego przypadku. \square

Wniosek 3.26. *W Lemacie 3.25 pokazaliśmy, że dla każdego pierwiastka pierwotnego nieparzystego stopnia $d > 2$, istnieje pierwiastek stopnia $2d$, których iloczyn jest równy -1 . Istotnie, ilość pierwiastków pierwotnych stopnia d i $2d$ jest taka sama ($\varphi(d) = \varphi(2d)$), stąd przyporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne.*

Poniżej przedstawimy bardzo silne ograniczenie dotyczące postaci $\text{MPer}_L(f)$ w sytuacji, gdy dyfeomorfizm zmienia orientację. Mianowicie, okazuje się, że odpowiedź na pytanie zawarte w Problemie 3.23 jest negatywna wśród dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a zmieniających orientację. Co więcej, $\text{MPer}_L(f)$ nie zawiera żadnej informacji o okresach minimalnych f .

Twierdzenie 3.27. *Niech funkcja $f: M_g \rightarrow M_g$ będzie dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a zmieniającym orientację orientowalnej zamkniętej powierzchni o genusie g , wtedy $\text{MPer}_L(f) = \emptyset$.*

Dowód. Weźmy dowolny dyfeomorfizm Morse'a-Smale'a $f: M_g \rightarrow M_g$ zmieniający orientację. Wtedy wartość własna homomorfizmu f_{*2} jest równa -1 oraz ciąg liczb Lefschetza z Definicji 1.12 jest równy

$$L(f^n) = 1^n - \text{tr}(f_{*1}) + (-1)^n = \text{reg}_2(n) - \text{tr}(f_{*1}^n).$$

Z drugiej strony wiemy, że (por. wzór (2.11))

$$L(f^n) = \sum_d \frac{e(d)}{\varphi(d)} L_d(n).$$

Wystarczy, że zbadamy wkład współczynników nieparzystych rozwinięcia okresowego ciągów $\{L_d(n)\}_{n=1}^{\infty}$ w rozwinięcie okresowe ciągu liczb Lefschetza $\{L(f^n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Z Twierdzenia 3.22 iloczyn wartości własnych $\lambda_i, \hat{\lambda}_i$ homomorfizmu f^{*1} odpowiadających generatorom $\alpha_i, \beta_i \in H^{*1}(M_g; \mathbb{Q})$ równy jest $\lambda_i \hat{\lambda}_i = -1$ dla każdego $i \in \{1, \dots, g\}$. Wartości własne homomorfizmu f^* i f_* są takie same. Oznacza to, że dla dowolnej wartości własnej homomorfizmu f_{*1} musi istnieć inna wartość własna homomorfizmu f_{*1} , których iloczyn daje -1 .

Zbadamy wkład pierwiastków pierwotnych z jedyńki stopnia d w nieparzyste współczynniki rozwinięcia okresowego ciągu liczb Lefschetza.

- a) Jeśli $d = 1$, to pierwiastek jest równy 1 i odpowiada mu pierwiastek stopnia 2 równy -1 , których iloczyn jest równy -1 , stąd ilość pierwiastków pierwotnych stopnia 1 i 2 jest taka sama. Otrzymujemy $L_1(n) + L_2(n) = \text{reg}_2(n)$. Więc wartości własne f_{*1} równe 1 i -1 nie mają wpływu na współczynniki nieparzyste.

- b) Jeśli $4|d$, to z Lematu 3.24 b) pierwiastkowi pierwotnemu stopnia 4 odpowiada inny pierwiastek pierwotny stopnia 4. Wartość współczynników nieparzystych rozwinięcia okresowego $L_d(n)$ jest równa

$$b_k^d = \begin{cases} \mu\left(\frac{d}{k}\right) & \text{jeśli } k | d \\ 0 & \text{jeśli } k \nmid d \end{cases} = 0,$$

ponieważ $\frac{d}{k}$ nie jest liczbą bezkwadratową.

- c) Z Wniosku 3.26 wiemy, że istnieje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie pomiędzy pierwiastkami stopnia d i $2d$ (gdzie $d > 2$ jest nieparzyste), które grupuje pierwiastki w taki sposób, aby iloczyn dwóch był równy -1 . Zatem ilość pierwiastków stopnia d i $2d$ będących wartościami własnymi homomorfizmu f_{*1} jest taka sama. Z własności funkcji Möbiusa dla nieparzystych k mamy

$$b_k^d = \begin{cases} \mu\left(\frac{d}{k}\right) & \text{jeśli } k | d, \\ 0 & \text{jeśli } k \nmid d \end{cases} = \begin{cases} -\mu\left(\frac{2d}{k}\right) & \text{jeśli } k | 2d \\ 0 & \text{jeśli } k \nmid 2d. \end{cases} = -b_k^{2d}.$$

Z powyższego, nieparzyste współczynniki rozwinięcia okresowego sumy $L_d(n) + L_{2d}(n)$ się zerują.

Pokazaliśmy, że pierwiastki pierwotne homomorfizmu indukowanego f_* parują się w taki sposób, że sumy współczynników rozwinięcia okresowego odpowiadających sobie ciągów $L_i(n)$ oraz $L_j(n)$ są równe zero. Zatem współczynniki nieparzyste rozwinięcia okresowego $L(f^n)$ są równe zero i $\text{MPer}_L(f) = \emptyset$. \square

Lemat 3.28. *Przy założeniach Twierdzenia 3.27, funkcja zeta Lefschetza jest postaci*

$$Z_f(t) = \frac{p(t)}{(1-t^2)}, \text{ gdzie } p(t) = \prod_{j=1}^{\#\mathcal{D}} c_{d_j}(t).$$

Funkcja $c_{d_j}(t)$ jest wielomianem cyklotomicznym stopnia d_j dla $j \in \{1, \dots, \#\mathcal{D}\}$ oraz \mathcal{D} jest multizbiorem liczb naturalnych spełniającym warunki

(i) $2g = \sum_{j=1}^{\#\mathcal{D}} \varphi(d_j)$, $d_j \in \mathcal{D}$,

- (ii) jeśli d jest nieparzystą liczbą naturalną, to liczby d i $2d$ występują tyle samo razy w multizbiorze \mathcal{D} .

Dowód. Zauważmy, że ze wzoru (3.3) każdemu kompletowi pierwiastków pierwotnych z jedynki stopnia d będących wartościami własnymi f_{*i} , odpowiada wielomian cyklotomiczny c_d stopnia d będący częścią mianownika (gdy i jest parzyste) lub licznika (gdy i jest nieparzyste) funkcji zeta Lefschetza. Z założenia $f: M_g \rightarrow M_g$ jest dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a zmieniającym orientację, stąd $f_{*0} = id$, $f_{*2} = -id$. Zatem funkcję Z_f możemy zapisać jako

$$Z_f(t) = \frac{p(t)}{(1-t^2)}, \text{ gdzie } p(t) = \prod_{j=1}^{\#\mathcal{D}} c_{d_j}(t) \text{ oraz}$$

\mathcal{D} jest multizbiorem zawierającym stopnie pierwiastków pierwotnych z jedynki będące wartościami własnymi homomorfizmu f_{*1} . Pokażmy, że \mathcal{D} spełnia warunki z tezy. Przypomnijmy, że

$$H_1(M_g; \mathbb{Q}) = \underbrace{\mathbb{Q} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}}_{2g}.$$

Stąd f_{*1} posiada $2g$ wartości własnych. Oczywiście, jeśli pierwiastek pierwotny stopnia d jest wartością własną homomorfizmu f_{*1} , to pozostałe również. Wynika z tego, że wartościami własnymi są komplety $\varphi(d)$ pierwiastków pierwotnych, których w sumie jest $2g$, zatem zachodzi warunek (i) tj. $2g = \sum_{j=1}^{\#\mathcal{D}} \varphi(d_j)$, $d_j \in \mathcal{D}$.

Przejdźmy do dowodu warunku (ii). Ze wzoru (3.18) wiemy, że iloczyn odpowiadających sobie wartości własnych w przypadku dyfeomorfizmu zmieniającego orientację musi być równy -1 . Niech d będzie nieparzystą liczbą naturalną, z Wniosku 3.26, pierwiastki pierwotne stopnia d i $2d$ można pogrupować parami tak, aby ich iloczyn był równy -1 . Oczywiście pierwiastek pierwotny stopnia $d = 1$ można w ten sam sposób sparować z pierwiastkiem pierwotnym stopnia $d = 2$. Finalnie pierwiastki stopnia d i $2d$ muszą występować taką samą ilość razy w multizbiorze \mathcal{D} . \square

Wniosek 3.29. *Następujące Propozycje i Twierdzenia zawarte w [81] nie są prawdziwe: Propozycja 4.2, Propozycja 4.3, Propozycja 4.4., Twierdzenie 5.5, Twierdzenie 5.7*

Pozostaje spróbować odpowiedzieć na pytanie zawarte w Problemie 3.23 wśród dyfeomorfizmów zachowujących orientację.

Przypomnijmy, że homomorfizm indukowany f_* dowolnego dyfeomorfizmu Morse'a-Smale'a zachowującego orientację, posiada wartości własne f_{*0} i f_{*2} równe 1. Stąd ciąg liczb Lefschetza iteracji ma postać

$$L(f^n) = 1 - \text{tr}(f_{*1}) + 1 = 2\text{reg}_1(n) - \text{tr}(f_{*1}).$$

Twierdzenie 3.30. *Dla dowolnego skończonego ciągu m liczb całkowitych $\mathcal{G}_m = \{b_1, b_3, \dots, b_{2m-1}\}$ istnieje funkcja quasi-unipotentna $f_*: H_*(M_g; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(M_g; \mathbb{Q})$, dla której:*

$$a) L(f_*^n) = \text{tr}(f_{*0}^n) - \text{tr}(f_{*1}^n) + \text{tr}(f_{*2}^n) = - \sum_{i=1}^{2(2m-1)} 2 \cdot b_i \text{reg}_i(n).$$

$$b) \text{MPer}_L(f_*) = \{i : b_i \neq 0 \wedge b_i \in \mathcal{G}_m\},$$

Dowód. Konstrukcja homomorfizmu będzie analogiczna do tej, którą przedstawiliśmy w dowodzie Twierdzenia 3.18 z uwzględnieniem Warunków 3.6.1.

a) Ciąg liczb Lefschetza dowolnego dyfeomorfizmu Morse'a-Smale'a $f: M_g \rightarrow M_g$ zachowującego orientację możemy zapisać w postaci

$$L(f_*^n) = \text{tr}(f_{*0}^n) - \text{tr}(f_{*1}^n) + \text{tr}(f_{*2}^n) = 1 - \text{tr}(f_{*1}^n) + 1 = 2\text{reg}_1(n) - \text{tr}(f_{*1}^n).$$

Znajdziemy funkcję f^* , która dla danego ciągu m liczb całkowitych $\mathcal{G}_m = \{b_1, b_3, \dots, b_{2m-1}\}$ będzie posiadała liczby Lefschetza równe

$$L(f_*^n) = - \sum_{i=1}^{2(2m-1)} 2b_i \text{reg}_i(n) = \underbrace{2\text{reg}_1(n)}_{\text{tr}(f_{*0}^n) + \text{tr}(f_{*2}^n)} - \underbrace{\left((2b_1 + 2)\text{reg}_1(n) + \sum_{i=2}^{2(2m-1)} 2b_i \text{reg}_i(n) \right)}_{\text{tr}(f_{*1}^n)},$$

gdzie b_i to kolejne elementy ciągu \mathcal{G}_m dla i nieparzystych.

Przyjmijmy $f_{*0} = id$ oraz $f_{*2} = id$. Rozważmy wektor $[b_1 + 1, b_3, \dots, b_{2m-1}]$. Z Twierdzenia 3.17 istnieje jednoznaczna reprezentacja tego wektora w bazie $\{c^1, c^3, \dots, c^{2m-1}\}$ taka, że:

$$[b_1 + 1, b_3, \dots, b_{2m-1}] = \sum_{i=1}^m m_i c^{2i-1} = \sum_{i=1}^m |m_i| c^{s(i)}$$

dla $s(i) = \begin{cases} 2i - 1 & \text{jeśli } m_i > 0, \\ 2(2i - 1) & \text{jeśli } m_i < 0, \end{cases}$ gdzie w ostatniej równości używamy relacji $c^k = -c^{2k}$ (3.13). Teraz możemy zdefiniować homomorfizm f_{*1} reprezentowany przez macierz diagonalną wymiaru

$$2g = \sum_{i=1}^m 2|m_i| \varphi(2i - 1), \quad (3.19)$$

która zawiera na przekątnej $2|m_i|$ kopii wszystkich pierwiastków pierwotnych z jedności stopnia $(2i - 1)$, gdy $m_i \geq 0$ oraz $2|m_i|$ kopii wszystkich pierwiastków pierwotnych z jedności stopnia $2(2i - 1)$, gdy $m_i < 0$, gdzie $i = 1, \dots, m$.

- b) Weźmy funkcję quasi-unipotentną f_* , której konstrukcja została przedstawiona w punkcie a), wtedy $L(f_*^n) = - \sum_{i=1}^{2(2m-1)} b_i \text{reg}_i(n)$. Z Twierdzenia 3.14 otrzymujemy, że $\text{MPer}_L(f)$ składa się z nieparzystych indeksów i niezerowych współczynników b_i tj.

$$\text{MPer}_L(f_*) = \{i : b_i \neq 0 \wedge b_i \in \mathcal{G}_m\}.$$

□

Zauważmy, że skonstruowany homomorfizm f_* spełnia Warunki 3.6.1, konieczne dla istnienia homomorfizmu indukowanego pewnego dyfeomorfizmu Morse'a-Smale'a.

Wniosek 3.31. *Funkcja zeta Lefschetza realizacji f_* wyprowadzonej w dowodzie Twierdzenia 3.30 dana jest za pomocą wzoru*

$$Z_{f_*}(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \prod_i \left(\prod_{q|s(i)} (1-z^q)^{-\mu\left(\frac{s(i)}{q}\right)} \right)^{|2m_i|}. \quad (3.20)$$

Zauważmy, że $Z_{f_*}(t) = Z_{l_n}(t)$, gdzie $l_n = 1 - \sum_i |2m_i| L_{s(i)}(n)$. Zatem

$$Z_{f_*}(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \prod_i \left(Z_{L_{s(i)}}(t) \right)^{|2m_i|}$$

oraz z Twierdzenia 2.15 otrzymamy wzór (3.20).

Przyjrzyjmy się teraz Problemowi 3.33 przedstawionemu przez B. Iskrę, V.F. Sirventa w pracy [61]. W tym celu zdefiniujemy przez analogię do Definicji 3.10, zbiór $\text{MPer}_L(\mathcal{Z}_p)$ dla zadanej funkcji zeta.

Niech $g \in \mathbb{N}$ oraz $p(t)$ będzie iloczynem wielomianów cyklotomicznych, których suma stopni jest równa $2g$. Zdefiniujemy specjalną postać funkcji zeta:

$$\mathcal{Z}_p(t) := \begin{cases} \frac{p(t)}{(1-t^2)} & \text{jeśli współczynnik wiodący } p(t) \text{ jest równy } -1, \\ \frac{p(t)}{(1-t)^2} & \text{jeśli współczynnik wiodący } p(t) \text{ jest równy } 1. \end{cases} \quad (3.21)$$

Jeśli $\mathcal{Z}_p(t) \neq 1$, to definiujemy

$$\text{MPer}_L(\mathcal{Z}_p) := \bigcap \{r_1, \dots, r_{\eta(f)}\},$$

gdzie przecięcie rozważamy po wszystkich możliwych przedstawieniach $\mathcal{Z}_p(t)$ postaci

$$\mathcal{Z}_p(t) = \prod_{i=1}^{\eta_{\mathcal{Z}}} (1 + \Delta_i t^{r_i})^{m_i}, \quad (3.22)$$

gdzie $\Delta_i \in \{-1, 1\}$, $r_i \in \mathbb{N}$, $m_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz $\eta_{\mathcal{Z}}$ jest liczbą naturalną zależną od \mathcal{Z}_p . Dla $\mathcal{Z}_p(t) = 1$ definiujemy $\text{MPer}_L(\mathcal{Z}_p) := \emptyset$.

Uwaga 3.32 (Propozycja 2.1 [61]). Funkcja zeta dowolnego dyfeomorfizmu Morse'a-Smale'a $f: M_g \rightarrow M_g$ zmieniającego orientację przyjmuje postać pierwszą wzoru (3.21), a zachowującego orientację postać drugą wzoru (zob. Propozycja 4.3 [81]).

Problem 3.33 (B. Iskra, V.F. Sirvent [61]). Niech dany będzie skończony podzbiór nieparzystych liczb naturalnych S . Czy istnieje funkcja zeta Lefschetza $\mathcal{Z}_p(t)$ postaci (3.21) taka, że $\text{MPer}_L(\mathcal{Z}_p(t)) = S$?

W oryginalnie postawionym pytaniu nie było określenia „nieparzystych”. W takim wypadku odpowiedź na to pytanie jest trywialna, ponieważ $\text{MPer}_L(\mathcal{Z}_p)$ nie może zawierać liczb parzystych (czynnik $(1 - t^{2a}) = (1 - t^a)(1 + t^a)$). Odpowiemy na pytanie w przypadku, gdy $S \subsetneq (2\mathbb{N} - 1)$.

Lemat 3.34. *Dla dowolnego skończonego podzbioru nieparzystych liczb naturalnych S , istnieje funkcja zeta \mathcal{Z}_p postaci (3.21), dla której $\text{MPer}_L(\mathcal{Z}_p(t)) = S$.*

Dowód. Weźmy dowolny zbiór nieparzystych liczb naturalnych S , oznaczmy $m = \max(S)$. Zdefiniujmy skończony ciąg m liczb całkowitych postaci $\mathcal{G}_m = \{b_1, \dots, b_{2m-1}\}$, gdzie

$$b_k = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } k \in S, \\ 0 & \text{jeśli } k \notin S \end{cases}, \text{ dla } k \in \{1, \dots, 2m-1\}.$$

Z Twierdzenia 3.30, istnieje homomorfizm f_* spełniający Warunki 3.6.1 dla dyfeomorfizmu Morse'a-Smale'a zachowującego orientację, dla którego $\text{MPer}_L(f_*) = S$. Z Wniosku 3.20 wiemy, że odpowiadająca mu funkcja zeta jest postaci

$$Z_{f_*}(t) = Z_{l_n}(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \prod_{i=1}^m (Z_{L_{s(i)}}(t))^{|2m_i|},$$

gdzie $l_n = 1 - \sum_i |2m_i| L_{s(i)}(n)$ oraz $m_i \in \mathbb{Z}$. W Podrozdziale 3.4 pokazaliśmy, że rozważanie funkcji zeta (odp. Z_{f_*}) i rozwinięcia okresowego ciągu liczb Lefschetza (odp. $L(f_*)$) w kontekście minimalnych zbiorów okresów Lefschetza jest równoważne, stąd $\text{MPer}_L(f_*) = \text{MPer}_L(Z_{f_*})$. Zauważmy, że Z_{L_d} jest wielomianem cyklotomicznym

stopnia d , stąd $p(t) = \prod_{i=1}^m (Z_{L_{s(i)}}(t))^{|2m_i|}$ jest iloczynem wielomianów cyklotomicznych. Zauważmy, że jedynie wielomian cyklotomiczny stopnia pierwszego $c_1(t) = 1-t$ ma współczynnik wiodący równy -1 , ale z Warunków 3.6.1 (iii) pierwiastek pierwotny stopnia 1 jest wartością własną f_* parzystą ilość razy, stąd współczynnik wiodący $p(t)$ jest równy 1. Otrzymujemy, że szukaną funkcją zeta postaci (3.21) jest

$$\mathcal{Z}_p(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \prod_{i=1}^m (Z_{L_{s(i)}}(t))^{|2m_i|},$$

dla której $\text{MPer}_L(\mathcal{Z}_p(t)) = S$. □

3.7 Algorytmiczne podejście do znajdowania $\text{MPer}_L(f)$

W tej części opiszemy prosty algorytm, który pozwoli nam na znalezienie rodziny $\text{MPer}_L[N_g]$ wszystkich minimalnych zbiorów okresów Lefschetza określonych na rozmaitości N_g , gdzie g jest ustalony oraz

$$\text{MPer}_L[N_g] := \{\text{MPer}_L(f) \mid f: N_g \rightarrow N_g \text{ jest dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a}\}.$$

Użyjemy programu komputerowego bazującego na wyprowadzonym poniżej algorytmie w celu zweryfikowania $\text{MPer}_L(f)$ dla $g < 10$ przedstawionych w [82] oraz obliczymy $\text{MPer}_L(f)$ dla $g \geq 10$.

Załóżmy, że $g > 1$, w przeciwnym przypadku macierz f_{*1} jest zerowymiarowa i jedyną możliwością jest $\text{MPer}_L(f) = \{1\}$. Wymiar macierzy homomorfizmu f_{*1} wynosi $g-1$ i wszystkie wartości własne są pierwiastkami pierwotnymi z jedynki stopnia d_i pogrupowanymi po $\varphi(d_i)$ elementów. W związku z tym $g-1 = \sum_i \varphi(d_i)$.

Zdefiniujemy skończoną rodzinę P podziałów P_j liczby $g-1$ na sumę wszystkich możliwych wartości funkcji φ tzn.

$$P = \left\{ P_j = \bigcup_i \{d_i\} : g-1 = \sum_i \varphi(d_i), d_i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Kolejny lemat pozwoli nam znaleźć ograniczenie na ilość elementów rodziny P .

Lemat 3.35 (por. [91]). *Niech φ będzie funkcją Eulera. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, z wyjątkiem $n = 2, 4, 6, 10, 12, 18, 30$ zachodzi nierówność*

$$\varphi(n) \geq n^{\log_3 2}.$$

Wniosek 3.36. *Niech φ będzie funkcją Eulera. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\varphi(n) \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\log_3 2}. \quad (3.23)$$

Stosując nierówność (3.23) otrzymujemy

$$P = \left\{ \bigcup_i \{d_i\} : g-1 = \sum_i \varphi(d_i), d_i \leq 2(g-1)^{\log_2 3}, d_i \in \mathbb{N} \right\}. \quad (3.24)$$

Możemy powiązać każdy z podziałów P_j (tj. każdy zbiór stopni) z odpowiadającym elementem L_{d_i} ciągu Lefschetza w formie rozwinięcia okresowego:

$$L(f^n) = 1 - \sum_{d_i \in P_j} L_{d_i}(n) = \text{reg}_1(n) - \sum_{d_i \in P_j} \sum_k b_k^{d_i} \text{reg}_k(n),$$

gdzie $b_k^{d_i}$ są zdefiniowane za pomocą wzoru (2.13) w Twierdzeniu 2.12. Z Twierdzenia 3.14 zbiór minimalnych okresów M_{P_j} dla funkcji odpowiadającej grupie pierwiastków o stopniach P_j jest równy

$$M_{P_j} = \{k : \sum_{i=1}^{|P_j|} a_k^{d_i} \neq 0, 2 \nmid k, d_i \in P_j\}, \quad \text{gdzie } a_1^{d_i} = b_1^{d_i} - 1, a_k^{d_i} = b_k^{d_i} \text{ dla } k > 1.$$

Ostatecznie, zbór wszystkich możliwych minimalnych okresów Lefschetza dyfomorfizmów Morse'a-Smale'a f zdefiniowanych na N_g , dany jest za pomocą wzoru

$$\text{MPer}_L[N_g] = \bigcup_{j=1}^{|P|} \{M_{P_j}\}.$$

Przykład 3.37. Niech $g = 4$, wtedy $\dim f_{*1} = 3$. Istnieje 9 możliwych zbiorów P_j pierwiastków pierwotnych z jedynki (każdy ze zbiorów odpowiada pewnemu homomorfizmowi f_*). W Tabeli 3.2 zbiory $M_{P_j} = \text{MPer}_L(f)$ zostały opisane dla każdego P_j oraz została opisana rodzina $\text{MPer}_L[N_4]$.

P_j	$L(f^n)$	$M_{P_j} = \text{MPer}_L(f)$
$\{1, 3\}$	$\text{reg}_1(n) - \text{reg}_3(n)$	$\{1, 3\}$
$\{1, 4\}$	$\text{reg}_2(n) - \text{reg}_4(n)$	\emptyset
$\{1, 6\}$	$-\text{reg}_1(n) + \text{reg}_2(n) + \text{reg}_3(n) - \text{reg}_6(n)$	$\{1, 3\}$
$\{2, 3\}$	$3\text{reg}_1(n) - \text{reg}_2(n) - \text{reg}_3(n)$	$\{1\}$
$\{2, 4\}$	$2\text{reg}_1(n) - \text{reg}_4(n)$	$\{1\}$
$\{2, 6\}$	$\text{reg}_1(n) + \text{reg}_3(n) - \text{reg}_6(n)$	$\{1, 3\}$
$\{1, 1, 1\}$	$-2\text{reg}_1(n)$	$\{1\}$
$\{1, 1, 2\}$	$-\text{reg}_2(n)$	\emptyset
$\{1, 2, 2\}$	$2\text{reg}_1(n) - 2\text{reg}_2(n)$	$\{1\}$
$\text{MPer}_L[N_4]$		$\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$

Tabela 3.2: Zbiór $\text{MPer}_L[N_4]$ wszystkich możliwych minimalnych zbiorów okresów Lefschetza dla dyfomorfizmów Morse'a-Smale'a przestrzeni N_4

Genus	Wszystkie możliwe zbiory okresów Lefschetza - $MPer_L[N_g]$	Czas obliczeń (s)
9	$\{\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{9\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{1, 9\}, \{3, 5\}, \{3, 9\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 3, 9\}, \{3, 5, 15\}, \{1, 3, 5, 15\}\}$	0.0057
10	$\{\{\}, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{1, 9\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 9\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 3, 9\}, \{1, 3, 5, 15\}\}$	0.0069
30	Liczba list: 363	0.9865
40	Liczba list: 1230	10.7953
50	Liczba list: 3568	117.685

Tabela 3.3: Wybrane obliczenia rodziny $MPer_L[N_g]$ minimalnych zbiorów okresów Lefschetza dla dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a zdefiniowanych na N_g obliczone na CPU: Phenom II x4 965

Porównując wyniki Twierdzenia 8 w [83] dla $g = 9$ z wynikami obliczeń bazujących na przedstawionym algorytmie (por. Tabela 3.3) możemy zauważyć, że w [83] zabrakło przypadku $\{3, 5\}$. Realizacja tego zbioru została przedstawiona już w tej pracy, korzystając z definicji za pomocą funkcji zeta Lefschetza w Przykładzie 3.11 oraz korzystając z rozwinięcia okresowego w Przykładzie 3.15.

Algorytm zaprezentowany w tym podrozdziale można powtórzyć również w przypadku M_g , dodając ograniczenia dotyczące możliwych stopni pierwiastków występujących we wzorze (3.24). Wyniki prezentowane w Tabeli 3.3 dotyczące $MPer_L[N_g]$ dla $g = 1, \dots, 54$ oraz dotyczące $MPer_L[M_g]$ dla $g = 1, \dots, 20$ zostały opublikowane na portalu Most Danych [41, 42] (zob. [50]). Dla porównania ze zbiorem $MPer_L[M_g]$, w którym zostały uwzględnione relacje pierścienia kohomologii, w [49] zostały opublikowane wszystkie możliwe zbiory nieparzystych okresów algebraicznych funkcji quasi-unipotentnych zdefiniowanych na przestrzeni o takich samych grupach homologii jak suma spójna g torusów.

Rozdział 4

Minimalizacja liczby punktów okresowych w gładkiej klasie homotopii dla rozmaitości bez brzegu

W Rozdziałach 4 i 5 zajmiemy się kolejnym tematem badań dotyczącym minimalizacji liczby punktów okresowych w gładkiej klasie homotopii.

Klasyczny problem minimalizacji w teorii punktów stałych dotyczy poszukiwania minimalnej liczby punktów stałych w klasie homotopii. Jeśli $f: M \rightarrow M$ jest funkcją ciągłą działającą na zwartej rozmaitości M wymiaru $m \geq 3$, to liczba Nielsena $N(f)$ minimalizuje liczbę punktów stałych (więcej w [94]):

$$N(f) = \min\{\#\text{Fix}(g) : g \sim f\}.$$

W 1983 roku B. Jiang [70] wprowadził liczbę $NF_r(f)$ jako dolne oszacowanie liczby punktów r -okresowych w klasie homotopii. W 2006 roku J. Jezierski [63] udowodnił, że jest to najlepsze oszacowanie dolne tj.

$$NF_r(f) = \min\{\#\text{Fix}(g^r) : g \sim f\}.$$

Pojawia się pytanie, co w sytuacji, gdy rozważymy gładką klasę homotopii. Okazuje się, że $N(f)$ wciąż minimalizuje liczbę punktów stałych (B. Jiang [68]), jednak dla punktów r -okresowych zachodzi istotna różnica. W cyklu prac [28, 29, 31, 30, 32] G. Graff i J. Jezierski stworzyli gładkie odgałęzienie teorii Nielsena rozpoczynając od definicji $D_r^m[f]$ w przypadku rozmaitości jednorodnych i uogólniając $D_r^m[f]$ do $NJD_r[f]$, również w przypadku rozmaitości niejednorodnych. Pokazali, że

$$NJD_r(f) = \min\{\#\text{Fix}(g^r) : g \stackrel{s}{\sim} f\},$$

gdzie $\stackrel{s}{\sim}$ oznacza gładką klasę homotopii.

Różnica pomiędzy przypadkiem ciągłym a gładkim jest dobrze widoczna już w przypadku jednorodnej zamkniętej rozmaitości M . W tej sytuacji $NF_r(f) \in \{0, 1\}$ (Twierdzenie 5.1 [63]), ale $D_r^m[f]$ jest z reguły większy od 1 (por. Twierdzenie 4.18 oraz Tabela 4.1).

Rozdział 4 został podzielony na 5 podrozdziałów. Pierwsze dwa zawierają konstrukcję niezmiennika $D_r^m[f]$ oraz najważniejsze fakty potrzebne do prowadzenia

badani. Podrozdział 4.3 zawiera serię własnych wyników (w szczególności Twierdzenia 4.13, 4.18, 4.20) uogólniających istniejące już metody kombinatoryczne w taki sposób, aby działały dla dowolnych punktów r -okresowych, gdzie $r \in \mathbb{N}$. W Podrozdziale 4.4 badamy wartość niezmiennika Dolda dla rozmaitości 4-wymiarowych z określoną formą przecięcia. Wyniki zawarte w Podrozdziale 4.4 pochodzą ze wspólnej pracy w grupie badawczej H. Duan, G. Graff, J. Jezierski, A. Myszkowski [60]. W Podrozdziale 4.5 przedstawimy konstrukcję algorytmu pozwalającego na obliczenie $D_r^m[f]$ mod $\text{reg}_{1,2}$ dla $m \geq 3$. Wersja tego algorytmu dla $m = 4$ została przedstawiona w [60].

Istotność wyników wzmacnia fakt, że nie dotyczą wyłącznie niezmiennika $D_r^m[f]$, ale również badanego w pracach [37, 38] niezmiennika

$$J_r[f] = \min \left\{ \# \bigcup_{k \leq r} \text{Fix}(g^k) : g \stackrel{s}{\sim} f \right\},$$

ponieważ dla wystarczająco dużych r zachodzi równość $J_r[f] = D_{r!}^m[f]$ (Uwaga 2.9 [38]).

4.1 Konstrukcja niezmiennika $D_r^m[f]$

Definicja 4.1. Ciąg liczb całkowitych $\{c(n)\}_{n=1}^{\infty}$ nazywamy $DD^m(p)$ ciągiem, jeśli istnieją: funkcja klasy C^1 $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie $U \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem otwartym; izolowana orbita p -okresowa P odwzorowania ψ , dla którego $c(n) = \text{ind}(\psi^n, P)$. Dla ustalonego r , skończony ciąg $\{c(n)\}_{n|r}$ nazywamy $DD^m(p|r)$ ciągiem, jeśli równość zachodzi dla $n \in \text{Div}(r)$.

Niezmiennik $D_r^m[f]$ definiujemy jako najmniejszy rozkład ciągu liczb Lefschetza na sumę $DD^m(p|r)$ ciągów w następujący sposób.

Definicja 4.2. Niech r będzie ustaloną liczbą naturalną, $f: M \rightarrow M$ będzie funkcją gładką zamkniętej jednospójnej rozmaitości oraz dany będzie rozkład ciągu liczb Lefschetza iteracji $\{L(f^n)\}_{n|r}$:

$$L(f^n) = \sum_{i=1}^h c_i(n) \text{ dla } n|r, \quad (4.1)$$

gdzie $\{c_i\}_{n|r}$ są $DD^m(l_i|r)$ ciągami. Liczbę $D_r^m[f]$ definiujemy jako najmniejsze $l = l_i + \dots + l_h$, które można otrzymać w ten sposób.

Okazuje się, że w wielu przypadkach, w Definicji 4.2 zamiast $DD^m(p|r)$ ciągów możemy używać wyłącznie $DD^m(1|r)$ ciągów $\{c_i\}_{n|r}$, o czym mówi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.3 (Twierdzenie 4.2 [32]). Niech M będzie zamkniętą i jednospójną rozmaitością wymiaru $m \geq 4$, wtedy w Definicji 4.2 niezmiennika $D_r^m[f]$ możemy równoważnie użyć wyłącznie $DD^m(1|r)$ ciągów.

Twierdzenie 4.4 (Twierdzenie 3.8 [28]). Niech M będzie gładką, zwartą i jednospójną rozmaitością wymiaru $m \geq 3$ oraz $r \in \mathbb{N}$ będzie ustalone. Niech $f: M \rightarrow M$ będzie klasy C^1 . Wtedy

$$D_r^m[f] = \min_{g \sim f} \# \text{Fix}(g^r).$$

4.2 Indeksy punktów r -okresowych

W 1983 roku A. Dold sformułował warunek konieczny (Twierdzenie 1.1 [14]), jaki musi spełniać ciąg liczb całkowitych, aby być ciągiem indeksów punktu stałego iteracji pewnej funkcji ciągłej $f: U \rightarrow X$, gdzie $U \subset X$ jest otwartym podzbiorem ENR'a X . Dold udowodnił, że ciąg indeksów punktu stałego $\{\text{ind}(f^n)\}_{n=1}^\infty$ musi spełniać kongruencje Dolda (por. Definicja 2.1 i Twierdzenie 2.2).

Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie funkcją ciągłą zdefiniowaną na pewnym otoczeniu punktu $0 \in U \subset \mathbb{R}^m$. Załóżmy, że 0 jest jedynym punktem stałym f^n dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Pytamy, jaki ciąg liczb całkowitych $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ może być uzyskany jako $\{\text{ind}(f^n, 0)\}_{n=1}^\infty$? W pracach [1] oraz [51] pokazano, że jeśli ciąg spełnia kongruencje Dolda, to istnieje funkcja ciągła f realizująca dowolny ciąg $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ dla $m \geq 2$ przez ciąg indeksów na jednym punkcie stałym.

W gładkiej klasie homotopii sytuacja znacznie się różni. W 1974 roku M. Shub i P. Sullivan [93] udowodnili bardzo mocne ograniczenie mówiące o tym, że ciąg indeksów punktu stałego iteracji funkcji gładkiej w izolowanym punkcie stałym jest okresowy. W 1981 roku, S. N. Chow, J. Mallet-Paret i J. A. Yorke [12] pokazali, że dla funkcji gładkiej ciąg indeksów może zostać przedstawiony jako suma pewnych elementarnych ciągów, których współczynniki zależą od pochodnej funkcji w punkcie stałym. Prowadzi to do ograniczeń, które dotyczą ciągu indeksów $\{\text{ind}(f^n)\}_{n=1}^\infty$ dla f klasy C^1 . W artykule [12] przypuszczano, że podane warunki są również wystarczające do realizacji dowolnego ciągu liczb całkowitych jako ciągu indeksów pewnej C^1 funkcji. Potwierdzającą odpowiedź udzielili I. K. Babenko i S. A. Bogatyi [1] dla wymiaru 2 oraz G. Graff i P. Nowak-Przygodzki dla wymiaru 3. W 2011 roku G. Graff, J. Jezierski i P. Nowak-Przygodzki [36] przedstawili rozwiązanie hipotezy dla dowolnego wymiaru $m \in \mathbb{N}$, które zaprezentujemy poniżej w Twierdzeniu 4.6.

Definicja 4.5. *Wprowadźmy następującą notację. Przez $\text{LCM}(H)$ będziemy rozumieć najmniejszą wspólną wielokrotność wszystkich elementów ze zbioru H z zachowaniem konwencji, że $\text{LCM}(\emptyset) = 1$. Definiujemy zbiór \bar{H} jako: $\bar{H} = \{\text{LCM}(Q) : Q \subset H\}$. Dla liczby naturalnej s oznaczamy $L(s)$ jako dowolny podzbiór liczb naturalnych postaci $\{\text{LCM}(Q) : Q \subset L, \#L = s$ oraz $1, 2 \notin L\}$. Podobnie przez $L_2(s)$ oznaczamy dowolny podzbiór liczb naturalnych postaci $\{\text{LCM}(Q) : Q \subset L, \#L = s + 1$ oraz $1 \notin L, 2 \in L\}$.*

Zauważmy, że przez $L(s)$ oraz $L_2(s)$ oznaczamy pewne wariacje zbioru \bar{H} , w których wyróżnione zostały liczby 1 i 2 oraz wprowadzona została moc zbioru H .

Twierdzenie 4.6. *(Twierdzenie 3.1, 3.2 [36]) Niech $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie funkcją klasy C^1 z izolowanym punktem stałym 0 dla każdej iteracji. Wtedy,*

- *dowolny ciąg lokalnych indeksów iteracji $\{\text{ind}(f^n, 0)\}_{n=1}^\infty$ posiada jedną z przedstawionych poniżej form: (I) dla m nieparzystych oraz (II) dla m parzystych;*
- *dowolny ciąg liczb całkowitych, który jest w postaci jednej z poniższych list może zostać zrealizowany jako ciąg lokalnych indeksów iteracji pewnej funkcji $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ klasy C^1 , tzn. jest $DD^m(1)$ ciągiem;*

(I) *Dla nieparzystych m :*

$$(A^o) \quad \text{ind}(f^n, 0) = \sum_{k \in L_2(\frac{m-3}{2})} b_k \text{reg}_k(n).$$

$$(B^o), (C^o), (D^o) \quad \text{ind}(f^n, 0) = \sum_{k \in L(\frac{m-1}{2})} b_k \text{reg}_k(n),$$

gdzie

$$b_1 = \begin{cases} 1 & \text{w przypadku } (B^o), \\ -1 & \text{w przypadku } (C^o), \\ 0 & \text{w przypadku } (D^o). \end{cases}$$

$$(E^o), (F^o) \quad \text{ind}(f^n, 0) = \sum_{k \in L_2(\frac{m-1}{2})} b_k \text{reg}_k(n),$$

gdzie $b_1 = 1$ oraz

$$b_2 = \begin{cases} 0 & \text{w przypadku } (E^o), \\ -1 & \text{w przypadku } (F^o). \end{cases}$$

(II) Dla parzystych m :

$$(A^e) \quad \text{ind}(f^n, 0) = \sum_{k \in L_2(\frac{m-4}{2})} b_k \text{reg}_k(n).$$

$$(B^e) \quad \text{ind}(f^n, 0) = \sum_{k \in L(\frac{m-2}{2})} b_k \text{reg}_k(n).$$

$$(C^e), (D^e), (E^e) \quad \text{ind}(f^n, 0) = \sum_{k \in L_2(\frac{m-2}{2})} b_k \text{reg}_k(n),$$

gdzie

$$b_1 = \begin{cases} 1 & \text{w przypadku } (C^e), \\ -1 & \text{w przypadku } (D^e), \\ 0 & \text{w przypadku } (E^e). \end{cases}$$

$$(F^e) \quad \text{ind}(f^n, 0) = \sum_{k \in L(\frac{m}{2})} b_k \text{reg}_k(n),$$

gdzie $b_1 = 1$.

4.3 Kombinatoryczna postać niezmiennika $D_r^m[f]$

Bezpośrednie wyliczanie wartości niezmiennika $D_r^m[f]$ jest pracochłonne. Warto więc potrzebne elementy, które posłużą do znajdowania wartości niezmiennika i zalgorytmizowania obliczeń. Wyniki z tego rozdziału obejmują ściśle kombinatoryczną definicję niezmienników $H(B; l)$ oraz $H_2(B; l)$, za pomocą których zdefiniujemy $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$ oraz $D_r^m[f]$ (o czym mówi Twierdzenie 4.13 i Twierdzenie 4.20). Tak sformułowana kombinatoryczna definicja dla $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$ pozwala efektywnie obliczać jego wartość, co zostanie rozwinięte w kolejnych podrozdziałach.

Zauważmy, że wiele z $DD^m(1)$ ciągów przedstawionych w Twierdzeniu 4.6 posiada ograniczenia w stosunku do współczynników stojących przy reg_1 i reg_2 . Aby

dokładnie obliczyć wartość $D_r^m[f]$, musimy posiadać informację o współczynnikach b_1 i b_2 rozwinięcia okresowego ciągu liczb Lefschetza konkretnej funkcji. W związku z tym, aby efektywnie obliczać wartość niezmiennika początkowo zignorujemy współczynniki stojące przy reg_1 i reg_2 , a następnie sformułujemy warunki pozwalające wziąć je pod uwagę na końcu obliczeń.

Konstrukcja rozkładu podzbioru liczb naturalnych B przedstawiona w Definicji 4.7 została wprowadzona w pracy [32] podczas badania $D_r^m[f]$ dla nieparzystych r . Natomiast oznaczenie $H(B; l)$ i wyodrębnienie konstrukcji do miana definicji wyłoniło się w pracy [35], poświęconej zdefiniowanemu w Rozdziale 5 niezmiennikowi $D_r(f; M, \partial M)$. Poniżej zdefiniujemy ponadto liczbę $H_2(B; l)$, która posłuży do obliczania wartości $D_r^m[f]$, również dla parzystych r .

Definicja 4.7. *Dla skończonego podzbioru $B \subset \mathbb{N}$ oraz liczby naturalnej l definiujemy $H(B; l)$ jako minimalną liczbę h spełniającą następujące własności: istnieją podzbiory $B_1, \dots, B_h \subset \mathbb{N}$, dla których (notacja taka jak w Definicji 4.5)*

1. $\#B_i \leq l$,
2. $B \subset \bigcup_{i=1}^h \overline{B_i}$.

Każdą rodzinę zbiorów $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_h\}$, spełniającą $h = H(B; l)$ będziemy nazywać minimalnym rozkładem zbioru B . Analogicznie definiujemy liczbę $H_2(B; l)$ zastępując warunek (1) warunkiem (1')

$$1'. \#B_i \leq l, \text{ gdy } 2 \notin B_i \quad \vee \quad \#B_i \leq l + 1, \text{ gdy } 2 \in B_i,$$

Każdą rodzinę zbiorów $\mathcal{B}_2 = \{B_1, \dots, B_h\}$ spełniającą warunki (1') i (2) oraz $h = H_2(B; l)$ będziemy nazywać minimalnym rozkładem z dwójką zbioru B .

Istotnie $H_2(B; l)$ oraz $H(B; l)$ mogą przyjmować różne wartości, na przykład dla $B = \{1, 2, 3, 5\}$ i $l = 2$ otrzymujemy $H_2(B; l) = 1$ oraz $H(B; l) = 2$.

Liczby $H(B; l)$ oraz $H_2(B; l)$ są dobrze zdefiniowane, o czym mówi poniższy lemat.

Lemat 4.8. *Niech $B \subset \mathbb{N}$ będzie skończonym podzbiorem oraz $l \in \mathbb{N}$. Wtedy istnieje minimalny rozkład oraz minimalny rozkład z dwójką zbioru B .*

Dowód. Weźmy skończony podzbiór zbioru liczb naturalnych B oraz liczbę naturalną l . Niech $\mathcal{P} = \{B_1, \dots, B_s\}$ będzie rodziną wszystkich l -elementowych podzbiorów zbioru $\{1, \dots, \max\{B\}\}$, gdzie $s = \#P = \binom{\max\{B\}}{l}$. Oczywiście $B \subset \bigcup_{i=1}^s \overline{B_i}$, stąd rozpatrując wszystkie możliwe sumy h zbiorów rodziny \mathcal{P} dla $h = 1, \dots, s$ możemy znaleźć minimalny rozkład zbioru B . Analogicznie znaleźć możemy minimalny rozkład z dwójką zbioru B wśród zbiorów rodziny $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P} \cup \{B_i \cup \{2\} : B_i \in \mathcal{P} \wedge i \in \mathbb{N}\}$. \square

Uwaga 4.9. Dla dowolnego podzbioru liczb naturalnych B zachodzi nierówność

$$H(B; l + 1) \leq H_2(B; l) \leq H(B; l).$$

W przypadku, gdy B jest podzbiorem liczb nieparzystych, zachodzi równość $H(B; l) = H_2(B; l)$.

Okazuje się, że możemy znacznie ograniczyć poszukiwania minimalnego rozkładu do podzbiorów zbioru $\text{Div}(\text{LCM}(B))$. Własność ta znacznie upraszcza obliczenia komputerowe wartości niezmiennika, o których będziemy mówić w Podrozdziale 4.5.

Lemat 4.10. *Niech B będzie skończonym podzbiorem liczb naturalnych, $l \in \mathbb{N}$ oraz $h = H(B; l)$. Wówczas istnieje minimalny rozkład oraz minimalny rozkład z dwójką zbioru B wśród podzbiorów zbioru $\text{Div}(\text{LCM}(B)) \setminus \{1\} \subsetneq \mathbb{N}$ tj. istnieje rodzina $\mathcal{B}' = \{B'_1, \dots, B'_h\}$ zbiorów $B'_i \subset \text{Div}(\text{LCM}(B)) \setminus \{1\}$ spełniająca warunki Definicji 4.7.*

Dowód. Niech dany będzie podzbiór liczb naturalnych B , $l \in \mathbb{N}$ oraz $D = \text{Div}(\text{LCM}(B))$ będzie pewnym podzbiorem liczb naturalnych. Niech $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_h\}$ będzie minimalnym rozkładem zbioru B . Zdefiniujmy $B'_i = B_i \cap D \subset D$ dla $i = 1, \dots, h$. Pokażemy, że rodzina $\mathcal{B}' = \{B'_1, \dots, B'_h\}$ jest minimalnym rozkładem zbioru B . Oczywiście, jeśli $\#B_i \leq l$, to również $\#B'_i \leq l$. Zauważmy, że

$$\overline{B}_i \cap D = \{\text{LCM}(Q) : Q \subset B_i\} \cap D = \{\text{LCM}(Q) : Q \subset B_i \wedge \text{LCM}(Q) \in D\}.$$

Pokażemy, że

$$\text{LCM}(Q) \in D \Leftrightarrow Q \subset D.$$

Oczywiście D zawiera wszystkie dzielniki $\text{LCM}(B)$, więc jeśli $\text{LCM}(Q) \in D$, to również $\text{Div}(\text{LCM}(Q)) \subset D$, a oczywiście $Q \subset \text{Div}(\text{LCM}(Q))$. W drugą stronę, jeśli Q jest podzbiorem dzielników $\text{LCM}(B)$, to w sposób trywialny ich najmniejsza wspólna wielokrotność $\text{LCM}(Q)$ również jest dzielnikiem $\text{LCM}(B)$. Możemy więc zapisać

$$\begin{aligned} \overline{B}_i \cap D &= \{\text{LCM}(Q) : Q \subset B_i \wedge \text{LCM}(Q) \in D\} = \{\text{LCM}(Q) : Q \subset B_i \wedge Q \subset D\} \\ &= \{\text{LCM}(Q) : Q \subset B_i \cap D\} = \overline{B_i \cap D} = \overline{B'_i}. \end{aligned}$$

Z warunku (2) Definicji 4.7 wiemy, że

$$B \subset \bigcup_{i=1}^h \overline{B}_i \Rightarrow B = B \cap D \subset \left(\bigcup_{i=1}^h \overline{B}_i \right) \cap D \Leftrightarrow B \subset \bigcup_{i=1}^h (\overline{B}_i \cap D) = \bigcup_{i=1}^h \overline{B_i \cap D} = \bigcup_{i=1}^h \overline{B'_i}.$$

Pokazaliśmy, że rodzina $\mathcal{B}' = \{B'_1, \dots, B'_h\}$ spełnia warunki Definicji 4.7, więc jest minimalnym rozkładem zbioru B . Pozostaje zmodyfikować zbiory rodziny \mathcal{B}' w taki sposób, aby 1 nie należała do żadnego z nich. Jeśli $1 \in B'_i$ dla pewnego i , to możemy go zastąpić przez zbiór $B'_i \setminus \{1\}$. Wynika to z faktu, że $\#B'_i \setminus \{1\} \leq \#B'_i \leq l$ oraz $\overline{B'_i \setminus \{1\}} = \overline{B'_i}$, więc zmiana nie wpływa na warunki (1) i (2) Definicji 4.7. Finalnie \mathcal{B}' jest poszukiwaną rodziną.

Dowód istnienia minimalnego rozkładu z dwójką zbioru B wśród podzbiorów zbioru $\text{Div}(\text{LCM}(B))$ jest analogiczny, wystarczy zamiast minimalnego rozkładu \mathcal{B} wziąć minimalny rozkład z dwójką \mathcal{B}_2 i powtórzyć rozumowanie. \square

Definiując $H(B; l)$ oraz $H_2(B; l)$ dla $B \subsetneq \mathbb{N}$ oraz $l \in \mathbb{N}$ zamiast $B_1, \dots, B_h \subset \mathbb{N}$ możemy równoważnie używać $B_1, \dots, B_h \subset \text{Div}(\text{LCM}(B)) \setminus \{1\}$. Zauważmy, że istotnie $\text{Div}(\text{LCM}(B)) \setminus \{1\}$ jest najmniejszym możliwym zbiorem, w którym możemy szukać minimalnego rozkładu dla dowolnego zbioru B . W sposób trywialny widać to na przykładzie $B = \text{Div}(\text{LCM}(B))$, wtedy oczywiście nie znajdziemy minimalnego rozkładu zbioru B w zbiorze mniejszym niż $\text{Div}(\text{LCM}(B)) \setminus \{1\}$. Mniej trywialny przykład znajduje się poniżej.

Przykład 4.11. Niech $B = \{3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ oraz $l = 3$, wtedy oczywiście $h = H(B; l) = 1$, ponieważ $\mathcal{B} = \{\{2, 3, 5\}\}$ jest minimalnym rozkładem zbioru B zgodnie z Definicją 4.7. Zauważmy jednak, że dla $D = \text{Div}(\text{LCM}(B)) \setminus \{1, 2\} = \text{Div}(30) \setminus \{1, 2\}$ zbiór $\{2, 3, 5\} \subsetneq D$ oraz żaden inny trójelementowy podzbiór B zawarty w D nie tworzy rodziny będącej minimalnym rozkładem zbioru B .

Wniosek 4.12. Jeśli $r \in \mathbb{N}$ oraz $B = \text{Div}(r)$, to istnieje minimalny rozkład (minimalny rozkład z dwójką) zbioru B taki, że $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_h\}$ ($B_2 = \{B_1, \dots, B_h\}$) oraz $B_i \subset \text{Div}(r) \setminus \{1\}$.

Poniższe twierdzenie uogólnia dotychczas znaną reprezentację kombinatoryczną, przedstawioną w Lemacie 5.4 [32].

Twierdzenie 4.13. Niech M będzie zamkniętą i jednorodną rozmaitością wymiaru $m = \dim M \geq 4$, r będzie liczbą naturalną oraz $f: M \rightarrow M$ będzie funkcją gładką, wtedy

$$D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = \begin{cases} H_2(AP_r(f); l) & \text{jeśli } m \text{ jest nieparzyste i } r \text{ jest parzyste,} \\ H(AP_r(f); l) & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie $\dim M = 2l + 1$ albo $\dim M = 2l$.

Dowód. Rozpocznijmy od rozważenia przypadku, gdy $\dim M = 2l + 1$ oraz r jest liczbą parzystą. Z Definicji 4.2 będziemy szukać minimalnego rozkładu ciągu liczb Lefschetza $\{L(f^n)\}_{n|r}$ zgodnie ze wzorem (4.1), tj.:

$$L(f^n) = \sum_{i=1}^h c_i(n), \quad (4.2)$$

dla $n|r$, gdzie każdy ciąg $\{c_i(n)\}_{n|r}$ jest $DD^m(1|r)$ ciągiem. Przypomnijmy, że pełna lista $DD^m(1|r)$ ciągów znajduje się w Twierdzeniu 4.6, a ciągi różnią się od siebie możliwymi wartościami współczynników b_1, b_2 oraz wielkością zbioru indeksów sumowania (im większy, tym więcej współczynników b_i realizuje ciąg).

Ponieważ poszukujemy $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$, będziemy ignorować współczynniki b_1 i b_2 rozwinięcia okresowego, zatem ciągi $\{c_i(n)\}_{n|r}$, które mogą wystąpić w rozkładzie (4.2) możemy zawsze utożsamić z ciągami typu (E^o) lub (F^o) występującymi w Twierdzeniu 4.6 (dla $n|r$), przy czym część z współczynników g_k występujących w rozwinięciu okresowym może być równe zero:

$$c_i(n) = \sum_{k \in L_2(l)} g_k \text{reg}_k(n).$$

Widzimy, że postać ciągu zależy już tylko od zbioru indeksów, po którym sumujemy. Z tego wynika, że każdy $DD^{2l+1}(1|r)$ ciąg $\{c_i(n)\}_{n|r}$ odpowiada zbiorowi B_i zawierającemu liczbę 2 oraz co najwyżej l dzielników r różnych od 1 i 2, stąd $\#B_i \leq l + 1$, $2 \in B_i$ oraz

$$c_i(n) = \sum_{k \in \overline{B}_i} g_k \text{reg}_k(n). \quad (4.3)$$

Z (4.2) wiemy, że $DD^{2l}(1|r)$ ciągi $\{c_i(n)\}_{n|r}$ realizują wszystkie współczynniki $b_k \text{reg}_k$ rozwinięcia okresowego

$$L(f^n) = \sum_{i=1}^h c_i(n) = \sum_{i=1}^h \sum_{k \in \overline{B}_i} g_k \text{reg}_k(n) = \sum_{k \in AP_r(f)} b_k \text{reg}_k(n), \quad (4.4)$$

dla $n|r$. Finalnie $\cup_{i=1}^h \overline{B}_i \subset AP_r(f)$, więc znalezienie minimalnej realizacji ciągu $\{L(f^n)\}_{n|r}$ jest równoważne znalezieniu minimalnego rozkładu z dwójką $\mathcal{B}_2 = \{B_1, \dots, B_h\}$, zatem $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = H_2(AP_r(f); l)$. Ponadto dla r nieparzystych mamy $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = H_2(AP_r(f); l) = H(AP_r(f); l)$, co wynika z Uwagi 4.9.

Jeśli $\dim M = 2l$ jest parzyste, to analogicznie do poprzedniej części dowodu poszukujemy minimalnego rozkładu ciągu liczb Lefschetza na sumę $DD^m(1|r)$ ciągów (4.2). Pamiętać jednak należy, że zgodnie z Twierdzeniem 4.6 dla wymiaru parzystego, możliwe ciągi $\{c_i(n)\}_{n|r}$ możemy utożsamić z ciągami typu (C^e) , (D^e) , (E^e) lub (F^e) . Każdemu takiemu ciągowi odpowiada zbiór B_i zawierający co najwyżej $\frac{m}{2} = l$ dzielników r , przy czym dla ciągów typu (C^e) , (D^e) , (E^e) mamy $1, 2 \notin B_i$, a dla (F^e) jedynie $1 \notin B_i$, ale $2 \in B_i$. Stąd $\#B_i \leq l$ oraz zachodzi równość (4.4), z której ponownie wynika, że dla rodziny $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_h\}$, $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = H(AP_r(f); l)$. \square

Wniosek 4.14. *Jeśli założenia powyższego twierdzenia są spełnione oraz r jest liczbą nieparzystą, to*

$$D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = D_r^m[f] \bmod \text{reg}_1 = H(AP_r(f); l).$$

Dowód. Jeśli r jest liczbą nieparzystą, to $AP_r(f)$ jest podzbiorem liczb nieparzystych, nie trzeba więc ignorować współczynnika przy reg_2 , bo $2 \notin AP_r(f)$, więc $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = D_r^m[f] \bmod \text{reg}_1$. Stąd oraz z Uwagi 4.9 otrzymujemy, że $H_2(AP_r(f); l) = H(AP_r(f); l)$, finalnie $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_1 = D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = H(AP_r(f); l)$. \square

W rzeczywistości jedynie w małej ilości przypadków jesteśmy w stanie znaleźć dokładną wartość $H(AP_r(f); l)$ i $H_2(AP_r(f); l)$. W dalszej części wyprowadzimy wzór na wartość tych niezmienników, gdy $AP_r(f) = \text{Div}(r)$.

Uwaga 4.15. Zauważmy, że

$$D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} \leq D_r^m[f] \leq D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} + 1. \quad (4.5)$$

Istotnie, jeśli zachodzi taka potrzeba, możemy zrealizować ciąg $b_1 \text{reg}_1 + b_2 \text{reg}_2$ w (4.1) przez jeden z dodatkowych ciągów typu (A^e) lub (A^o) w Twierdzeniu 4.6.

Poniższy lemat podaje warunki dotyczące postaci liczb r_1 i r_2 , dla których wartości niezmiennika Dolda tej samej funkcji są równe. Pozwala to na uproszczenie rozważanych przypadków w dowodzie Twierdzenia 4.18 oraz przeprowadzanie obliczeń za pomocą Algorytmu 1 dla wielu przypadków jednocześnie.

Lemat 4.16. *Niech M będzie zamkniętą i jednospójną rozmaitością wymiaru $m = \dim M \geq 4$, r_1, r_2 będą liczbami naturalnymi o faktoryzacji $r_1 = p_1^{a_1} \dots p_v^{a_v}$, $r_2 = q_1^{a_1} \dots q_v^{a_v}$. Niech $f: M \rightarrow M$ będzie funkcją gładką taką, że $AP_{r_1}(f) = \text{Div}(r_1)$ oraz $AP_{r_2}(f) = \text{Div}(r_2)$. Jeśli jeden z poniższych warunków jest spełniony:*

- (i) *m jest parzyste i r_1, r_2 są dowolne,*
- (ii) *m jest nieparzyste i r_1, r_2 posiadają taką samą potęgę dwójki w rozkładzie na czynniki tj. $r_1 = 2^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_v^{a_v}$ i $r_2 = 2^{a_1} q_2^{a_2} \dots q_v^{a_v}$,*

gdzie p_i oraz q_i są liczbami pierwszymi, to $D_{r_1}^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = D_{r_2}^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$.

Dowód. Dla liczb naturalnych r_1 i r_2 o rozkładzie na czynniki pierwsze $r_1 = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}$ oraz $r_2 = \prod_{i=1}^k q_i^{a_i}$ zdefiniujemy funkcję $\tau: \text{Div}(r_1) \rightarrow \text{Div}(r_2)$ w następujący sposób: jeśli $x = \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i}$ jest faktoryzacją liczby naturalnej x , to

$$\tau(x) = \tau\left(\prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^k y_i^{\alpha_i}, \text{ gdzie } y_i = q_j \text{ jeśli } x_i = p_j \text{ dla pewnego } j.$$

Dla $B \subset \text{Div}(r_1)$ oznaczmy $B' = \tau(B)$. Zauważmy, że τ jest bijekcją taką, że zbiór liczb naturalnych postaci $\overline{B} = \{\text{LCM}(Q) : Q \subset B\}$ przeprowadza na zbiór postaci

$$\begin{aligned} \overline{B}' &= \tau(\overline{B}) = \{\tau(\text{LCM}(Q)) : Q \subset B\} = \{\text{LCM}(\tau(Q)) : Q \subset B\} \\ &= \{\text{LCM}(\tau(Q)) : \tau(Q) \subset \tau(B)\} = \{\text{LCM}(Q') : Q' \subset B'\} = \overline{B}'. \end{aligned}$$

W przypadku, gdy m jest parzyste, to z Twierdzenia 4.13:

$$D_{r_1}^m[f] \text{ mod } \text{reg}_{1,2} = H(AP_{r_1}(f); l) \text{ oraz } D_{r_2}^m[f] \text{ mod } \text{reg}_{1,2} = H(AP_{r_2}(f); l).$$

Niech $h = D_{r_1}^m[f] \text{ mod } \text{reg}_{1,2}$ oraz $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_h\}$ będzie minimalnym rozkładem zbioru $AP_{r_1}(f)$. Rodzina $\mathcal{B}' = \{B'_1, \dots, B'_h\}$, gdzie $B'_i = \tau(B_i)$, spełnia warunki (1) oraz (2) Definicji 4.7 dla $AP_{r_2}(f) = \text{Div}(r_2)$ więc $h = D_{r_2}^m[f] \text{ mod } \text{reg}_{1,2}$.

Przejdźmy do przypadku, gdy m jest nieparzyste. Przypomnijmy, że dla nieparzystych r zachodzi $H_2(AP_r(f); l) = H(AP_r(f); l)$, więc ponownie z Twierdzenia 4.13:

$$D_{r_1}^m[f] \text{ mod } \text{reg}_{1,2} = H_2(AP_{r_1}(f); l) \text{ oraz } D_{r_2}^m[f] \text{ mod } \text{reg}_{1,2} = H_2(AP_{r_2}(f); l).$$

Niech $h = D_{r_1}^m[f] \text{ mod } \text{reg}_{1,2}$ oraz $\mathcal{B}_2 = \{B_1, \dots, B_h\}$ będzie minimalnym rozkładem z dwójką zbioru $AP_{r_1}(f)$. Ponieważ $p_1 = q_1 = 2$, to bijekcja τ przeprowadza dowolny zbiór $B \in \mathcal{B}_2$ w taki sposób, że jeśli $2 \notin B$, to $2 \notin B'$ oraz jeśli $2 \in B$, to $2 \in B'$. W związku z tym rodzina $\mathcal{B}'_2 = \{B'_1, \dots, B'_h\}$, gdzie $B'_i = \tau(B_i)$ spełnia warunki (1') oraz (2) Definicji 4.7 dla $AP_{r_2}(f) = \text{Div}(r_2)$, więc $h = D_{r_2}^m[f] \text{ mod } \text{reg}_{1,2}$. □

Uwaga 4.17. Warunki (i), (ii) zawarte w Lemacie 4.16 można zastąpić warunkami (i'), (ii') przedstawionymi poniżej:

$$(i') \quad m = \dim M \text{ jest parzyste oraz podane multizbiory są sobie równe} \\ \{a_i : r_1 = \prod_{i=1}^v p_i^{a_i}\} = \{a_i : r_2 = \prod_{i=1}^v q_i^{a_i}\},$$

$$(ii') \quad m = \dim M \text{ jest nieparzyste oraz podane multizbiory są sobie równe} \\ \{a_i : r_1 = \prod_{i=1}^v p_i^{a_i}\} = \{a_i : r_2 = \prod_{i=1}^v q_i^{a_i}\}, \text{ gdzie } p_1 = q_1 = 2.$$

Poniżej zaprezentowane Twierdzenie 4.18 i Twierdzenie 4.20 uogólniają wyniki przedstawione przez G. Graffa i J. Jezierskiego (odpowiednio Twierdzenie 6.3 i Twierdzenie 5.5 [32]) opisując wartości $D_r^m[f]$ również dla punktów okresowych o parzystym okresie minimalnym r .

Twierdzenie 4.18. *Niech M będzie zamkniętą i jednospójną rozmaitością wymiaru $m = \dim M \geq 4$, $r = p_1 \dots p_v$ będzie iloczynem v różnych liczb pierwszych ($v \geq 1$), $f: M \rightarrow M$ będzie funkcją gładką taką, że $AP_r(f) = \text{Div}(r)$. Wtedy*

$$D_r^m[f] \text{ mod } \text{reg}_{1,2} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2^{v-1}-1}{2^l-1} \right\rfloor & \text{jeśli } m \text{ jest nieparzyste i } r \text{ jest parzyste,} \\ \left\lfloor \frac{2^v-1}{2^l-1} \right\rfloor & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie $m = 2l + 1$ lub $m = 2l$.

Dowód. Niech $r = p_1 \dots p_v$ będzie liczbą nieparzystą, gdzie $v \geq l$. Z Twierdzenia 6.3 [32] wiemy, że $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_1 = \left\lceil \frac{2^v - 1}{2^l - 1} \right\rceil$. Z drugiej strony na podstawie Wniosku 4.14 wiemy, że dla nieparzystych r współczynnik przy reg_2 nie wpływa na wartość niezmiennika, więc zachodzi równość

$$D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = D_r^m[f] \bmod \text{reg}_1 = \left\lceil \frac{2^v - 1}{2^l - 1} \right\rceil.$$

Założmy, że $p_1 = 2$ tj. $r = 2 \cdot p_2 \dots p_v$ jest liczbą parzystą. Rozpocznijmy od rozpatrzenia przypadku, gdy $m = \dim M$ jest liczbą parzystą. Weźmy liczbę nieparzystą $r_2 = \hat{p}_1 \cdot p_2 \dots p_v$, będącą iloczynem v różnych liczb pierwszych. Z Lematu 4.16 w przypadku, gdy m jest parzyste zachodzi równość $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = D_{r_2}^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$, stąd możemy użyć udowodnionego już dla liczb nieparzystych wzoru

$$D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = \left\lceil \frac{2^v - 1}{2^l - 1} \right\rceil.$$

Rozważmy ostatni przypadek, gdy $m = \dim M$ jest liczbą nieparzystą. Z Twierdzenia 4.13 mamy $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = H_2(AP_r(f); l)$. Chcemy znaleźć wartość $H_2(\text{Div}(r); l)$, a więc poszukujemy minimalnego rozkładu z dwójką zbioru $\text{Div}(r)$. Jeśli $v = l$, to $\mathcal{B} = \{\{p_1, \dots, p_v\}\}$ jest minimalnym rozkładem z dwójką, więc $H_2(\text{Div}(r); l) = 1$. Założmy, że $v \geq l + 1$, wtedy dla nieparzystego $\frac{r}{2}$ ponownie możemy skorzystać z Twierdzenia 6.3 [32]. Mamy

$$h = D_{r/2}^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = H_2(\text{Div}(r/2); l) = H(\text{Div}(r/2); l) = \left\lceil \frac{2^{v-1} - 1}{2^l - 1} \right\rceil,$$

a więc istnieje minimalny rozkład $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_h\}$ spełniający warunki (1) i (2) Definicji 4.7. Zdefiniujmy rodzinę $\mathcal{B}_2 = \{B'_1, \dots, B'_h\}$, gdzie $B'_i = B_i \cup \{2\}$ dla każdego $i = 1, \dots, h$. Pokażemy, że \mathcal{B}_2 jest minimalnym rozkładem z dwójką zbioru $\text{Div}(r)$. Ponieważ rodzina \mathcal{B} spełnia warunek (1), to rodzina \mathcal{B}_2 spełnia warunek (1'). Jeśli $b \in \overline{B}_i$, to $b, 2b \in \overline{B}'_i$, więc z faktu, że \mathcal{B} spełnia warunek (2) dostajemy

$$\text{Div}(r) = \text{Div}\left(\frac{r}{2}\right) \cup 2 \cdot \text{Div}\left(\frac{r}{2}\right) \cup \{2\} \subset \bigcup_{i=1}^h \overline{B}'_i.$$

Wynika z tego, że \mathcal{B}_2 jest rozkładem spełniającym warunki (1') i (2) (nie wiemy jeszcze, czy minimalnym), więc $H_2(\text{Div}(r); l) \leq h = \left\lceil \frac{2^{v-1} - 1}{2^l - 1} \right\rceil$. Podsumowując przedstawione oszacowania otrzymujemy

$$\left\lceil \frac{2^{v-1} - 1}{2^l - 1} \right\rceil = H\left(\text{Div}\left(\frac{r}{2}\right); l\right) = H_2\left(\text{Div}\left(\frac{r}{2}\right); l\right) \leq H_2(\text{Div}(r); l) \leq \left\lceil \frac{2^{v-1} - 1}{2^l - 1} \right\rceil.$$

Finalnie \mathcal{B}_2 jest minimalnym rozkładem z dwójką zbioru $\text{Div}(r)$ oraz

$$D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = H_2(AP_r(f); l) = \left\lceil \frac{2^{v-1} - 1}{2^l - 1} \right\rceil.$$

□

Uwaga 4.19. Jeśli w założeniach Twierdzenia 4.18 przyjmiemy $1 \leq v \leq l$, to

$$D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = 1.$$

Twierdzenie 4.20. Niech M będzie zamkniętą i jednorodną rozmaitością wymiaru $m = \dim M \geq 4$, r będzie liczbą naturalną oraz $f: M \rightarrow M$ będzie funkcją gładką.

Jeśli $m = 2l + 1$ jest liczbą nieparzystą, \mathcal{B}_2 jest minimalnym rozkładem z dwójką zbioru $AP_r(f)$ takim, że $E = \{B_i : 2 \in B_i\}$ oraz $O = \{B_i : 2 \notin B_i\}$, to

$$D_r^m[f] = \begin{cases} D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} & \text{jeśli } O \neq \emptyset \text{ i } |L(f) - \#E| \leq \#O \text{ lub} \\ & O = \emptyset \text{ i } L(f) = \#E \text{ i } 0 \leq L(f^2) - L(f) \leq 2\#E \\ & \text{lub istnieje minimalny rozkład z dwójką } \mathcal{B}_2 \text{ taki,} \\ & \text{że } \#(B_i \setminus \{2\}) < \frac{m-1}{2} \text{ dla pewnego } i, \\ D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} + 1 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Jeśli $m = 2l$ jest liczbą parzystą, \mathcal{B} jest minimalnym rozkładem zbioru $AP_r(f)$ takim, że $E = \{B_i : 2 \in B_i\}$ oraz $O = \{B_i : 2 \notin B_i\}$, to

$$D_r^m[f] = \begin{cases} D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} & \text{jeśli } |L(f) - \#O| \leq \#E \\ & \text{lub istnieje minimalny rozkład } \mathcal{B} \text{ taki, że} \\ & \#B_i < \frac{m}{2} \text{ dla pewnego } i, \\ D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} + 1 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Dowód. Rozważmy przypadek dla $m = 2l + 1$. Niech $\mathcal{B}_2 = \{B_1, \dots, B_h\}$ będzie minimalnym rozkładem z dwójką zbioru $AP_r(f)$. Jeśli dla pewnego i $\#(B_i \setminus \{2\}) < \frac{m-1}{2}$ wtedy B_i możemy utożsamić z ciągiem typu (A°) , dla którego współczynniki stojące przy reg_1 i reg_2 są dowolne.

W przypadku, gdy $\#(B_i \setminus \{2\}) = \frac{m-1}{2}$ dla każdego i , używamy $\#O$ ciągów typu (B°) , (C°) , (D°) , dla których współczynnik przy reg_1 należy do zbioru $\{-1, 0, 1\}$ oraz $\#E$ ciągów typu (E°) , (F°) , dla których współczynnik przy reg_1 równy jest 1, a współczynnik przy reg_2 należy do zbioru $\{-1, 0\}$. Jeśli $O \neq \emptyset$, to jeden z ciągów (B°) , (C°) , (D°) realizuje współczynnik przy reg_2 , a współczynnik przy reg_1 równy $L(f)$ spełnia nierówność

$$\#E - \#O \leq L(f) \leq \#E + \#O \Leftrightarrow |L(f) - \#E| \leq \#O. \quad (4.6)$$

Z kolei jeśli $O = \emptyset$, to musimy używać wyłącznie $\#E$ ciągów typu (E°) , (F°) , dla których współczynnik przy reg_1 jest równy 1, a współczynnik przy reg_2 należy do zbioru $\{-1, 0\}$, stąd nierówność (4.6) przybiera postać $L(f) = \#E$ oraz współczynnik b_2 rozwinięcia okresowego $\{L(f^n)\}_{n=1}^\infty$ równy ze wzoru (2.4) $b_2 = \frac{1}{2}(L(f) - L(f^2))$ musi spełniać nierówność

$$-\#E \leq \frac{1}{2}(L(f) - L(f^2)) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq L(f^2) - L(f) \leq 2\#E.$$

W pozostałych przypadkach powinniśmy użyć dodatkowo jednego ciągu typu (A°) , który realizuje współczynnik przy b_1 .

Rozważmy przypadek dla $m = 2l$. Niech $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_h\}$ będzie minimalnym rozkładem zbioru $AP_r(f)$. Zauważmy, że żaden z ciągów postaci $(A^e), \dots, (F^e)$ nie posiada ograniczeń na współczynnik stojący przy reg_2 , zatem wystarczy, że będziemy analizowali wartości współczynnika przy reg_1 . Jeśli dla pewnego i $\#(B_i \setminus \{2\}) < \frac{m-2}{2}$, wtedy B_i możemy utożsamić z ciągiem typu (A^e) , gdy $2 \in B_i$ lub (B^e) , gdy $2 \notin B_i$, dla którego współczynnik stojący przy reg_1 jest dowolny.

W przypadku, gdy $\#(B_i \setminus \{2\}) = \frac{m}{2}$ dla każdego i , używamy $\#E$ ciągów typu (C^e) , (D^e) , (E^e) , dla których współczynnik przy reg_1 należy do zbioru $\{-1, 0, 1\}$ oraz $\#O$ ciągów typu (F^e) , dla którego współczynnik przy reg_1 jest równy 1. Zatem sumując ciągi, otrzymujemy, że współczynnik przy reg_1 równy $L(f)$ powinien spełniać nierówność

$$\#O - \#E \leq L(f) \leq \#O + \#E \Leftrightarrow |L(f) - \#O| \leq \#E.$$

W pozostałych przypadkach powinniśmy użyć dodatkowo jednego ciągu typu (A^e) lub (B^e) , który realizuje współczynnik przy b_1 . \square

Wniosek 4.21. *W przypadku, gdy r jest liczbą nieparzystą, to zbiór E zdefiniowany w Twierdzeniu 4.20 jest zbiorem pustym, a teza przyjmuje postać z Twierdzenia 5.5 [32].*

4.4 $D_r^4[f]$ dla 4-wymiarowych rozmaitości z określona formą przecięcia

Przypomnijmy, że macierz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy *unimodularną*, jeśli $\det A = \pm 1$.

Twierdzenie 4.22 (Twierdzenie 1.5 [22]). *Dla dowolnej unimodularnej i symetrycznej macierzy całkowitoliczbowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ istnieje jednospójna rozmaitość 4-wymiarowa M_A oraz baza drugiej grupy kohomologii*

$$\{\omega_1, \dots, \omega_n\} \subset H^{*2}(M_A; \mathbb{Z})$$

taka, że a_{ij} spełniają równość $\omega_i \smile \omega_j = a_{ij} \cdot \omega_M$, gdzie $\omega_M \in H^{*2}(M_A; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ jest generatorem 4-tej grupy kohomologii rozmaitości M_A .

Przeciwnie, dla dowolnej jednospójnej rozmaitości M wymiaru 4 z bazą drugiej grupy kohomologii

$$\{\omega_1, \dots, \omega_n\} \subset H^{*2}(M; \mathbb{Z}),$$

macierz całkowitoliczbową $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ zdefiniowaną przez relację $\omega_i \smile \omega_j = a_{ij} \cdot \omega_{M_A}$ jest unimodularna oraz symetryczna.

Pojawiającą się w Twierdzeniu 4.22 macierz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ będziemy nazywać *formą przecięcia* jednospójnej rozmaitości M wymiaru 4 w bazie $\{\omega_1, \dots, \omega_n\} \subset H^{*2}(M; \mathbb{Z})$.

Niech M będzie jednospójną rozmaitością wymiaru 4. Przez $[M, M]$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich klas homotopii funkcji $f: M \rightarrow M$, a przez $\text{Hom}(H^2(M), H^2(M))$ zbiór wszystkich homomorfizmów $h: H^{*2}(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{*2}(M; \mathbb{Z})$. Oczywiście zbiór homomorfizmów indukowanych funkcji $f: M \rightarrow M$ jest podzbiorem zbioru wszystkich homomorfizmów $\text{Hom}(H^{*2}(M; \mathbb{Z}), H^{*2}(M; \mathbb{Z}))$ (często jest to podzbiór właściwy). Zauważmy, że $\text{Hom}(H^{*2}(M; \mathbb{Z}), H^{*2}(M; \mathbb{Z}))$ można utożsamić z podzbiorem $M(n)$ macierzy kwadratowych stopnia n w taki sposób, że dowolna funkcja $f: M \rightarrow M$ indukuje homomorfizm $f^{*2}: H^{*2}(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{*2}(M; \mathbb{Z})$, któremu można przypisać pewną macierz całkowitoliczbową $P = [p_{ij}]_{n \times n} \in M(n)$ spełniającą równanie

$$\begin{bmatrix} f^*(\omega_1) \\ \vdots \\ f^*(\omega_n) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie g , które klasie homotopii $[f] \in [M, M]$ przyporządkowuje macierz P homomorfizmu indukowanego $f^*: H^{*2}(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{*2}(M; \mathbb{Z})$ (gdzie f jest dowolnym reprezentantem klasy homotopii). W ten sposób otrzymujemy odwzorowanie g ze zbioru klas homotopii $[M, M]$ funkcji ciągłych postaci $f: M \rightarrow M$ w zbiór $M(n)$ macierzy kwadratowych stopnia n

$$g: [M, M] \rightarrow M(n) = \{[p_{ij}]_{n \times n} \mid p_{ij} \in \mathbb{Z}\}.$$

Okazuje się, że zbiór klas homotopii jest wzajemnie jednoznaczny z pewnym podzbiorem zbioru macierzy kwadratowych stopnia n , o czym mówi poniższe twierdzenie udowodnione przez H. Duana i S. Wang (Diagram (1.1) w Twierdzeniu A' [17]).

Twierdzenie 4.23. (Twierdzenia A' [17], Diagram (1.1)) Niech M będzie jednospójną rozmaitością wymiaru 4 z bazą $\{\omega_1, \dots, \omega_n\} \subset H^{*2}(M; \mathbb{Z})$ drugiej grupy kohomologii. Funkcja g indukuje bijekcję pomiędzy $[M, M]$ i podzbiorem $M(n)$ postaci

$$\{P \in M(n) : PAP^T = k \cdot A, k \in \mathbb{Z}\}, \quad (4.7)$$

gdzie $P = g[f]$ oraz $k = \deg(f)$.

Bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia 4.23 jest następujący wniosek.

Wniosek 4.24. Niech $[f] \in [M, M]$ będzie klasą homotopii funkcji $f: M \rightarrow M$, wtedy

1. $L(f) = 1 + \text{tr}(g([f])) + \deg f$.

W szczególności

2. $L(f^n) = 1 + \text{tr}(g([f])^n) + (\deg f)^n$.

Uwaga 4.25. Niech M będzie jednospójną rozmaitością wymiaru 4, której forma przecięcia zadana jest przez macierz A . Twierdzenie 4.23 redukuje problem klasyfikacji funkcji $f: M \rightarrow M$ do arytmetycznego problemu znajdowania rozwiązań (P, k) układu równań kwadratowych $PAP^T = k \cdot A$ w pierścieniu liczb całkowitych. Zauważmy, że każde rozwiązanie (P, k) odpowiada pewnej funkcji $f: M \rightarrow M$, której ciąg liczb Lefschetza iteracji jest postaci $L(f^n) = 1 + \text{tr}(P^n) + k^n$ z Wniosku 4.24.

4.4.1 $AP_r(f)$ dla 4-wymiarowych rozmaitości z określoną formą przecięcia

W tej części opiszemy zbiór $AP_r(f)$ okresów algebraicznych dla funkcji zdefiniowanych na rozważanych 4-wymiarowych rozmaitościach z określoną formą przecięcia (dodatnio lub ujemnie). W tym podrozdziale nie zakładamy gładkości funkcji f .

Definicja 4.26. Mówimy, że macierz kwadratowa A jest podobna do macierzy kwadratowej B , jeśli istnieje nieosobliwa macierz C spełniająca równanie $A = C^{-1}BC$.

Łatwo zauważyć, że macierze podobne mają takie same wartości własne. Rozpoczniemy od dowodu dwóch przydatnych lematów.

Lemat 4.27. Rozważmy równanie macierzowe

$$PAP^T = A, \quad (4.8)$$

gdzie $A, P \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ oraz A jest dodatnio określoną macierzą symetryczną. Wtedy P jest podobna do macierzy ortogonalnej.

Dowód. Weźmy rozkład Cholesky'ego macierzy symetrycznej A na iloczyn macierzy Q i Q^T postaci $A = QQ^T$, gdzie $Q \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$. Wtedy równanie $PAP^T = A$ możemy przedstawić w następujący sposób

$$P \cdot QQ^T \cdot P^T = QQ^T \text{ i.e. } Q^{-1}PQQ^T P^T (Q^T)^{-1} = I.$$

Otrzymujemy $(Q^{-1}PQ) \cdot (Q^{-1}PQ)^T = I$, co oznacza, że $Q^{-1}PQ$ jest ortogonalna. \square

Lemat 4.28. Rozważmy równanie macierzowe

$$PAP^T = k \cdot A \quad (4.9)$$

gdzie $A, P \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ oraz A dodatnio określoną macierzą symetryczną, wtedy

$$|\text{tr}P| \leq m \cdot \sqrt{k}. \quad (4.10)$$

Dowód. Zauważmy, że $PAP^T = kA \iff (\frac{1}{\sqrt{k}}P)A(\frac{1}{\sqrt{k}}P)^T = A$. Z Lematu 4.27 $(\frac{1}{\sqrt{k}}P)$ jest podobna do pewnej macierzy ortogonalnej P' . Z drugiej strony, wszystkie wartości własne macierzy ortogonalnej są co do modułu równe jeden, stąd $|\text{tr}P'| \leq m$. Finalnie otrzymujemy nierówność

$$\left| \text{tr} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}P \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{k}} |\text{tr}P| \leq m.$$

\square

Biorąc pod uwagę fakt, że jeśli stopień topologiczny odwzorowania f jest równy k , to stopień f^n jest równy k^n . Otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 4.29. Jeśli założenia Lematu 4.28 są spełnione, to zachodzi oszacowanie dla P^n :

$$|\text{tr}P^n| \leq m \cdot \sqrt{k^n}. \quad (4.11)$$

Jesteśmy gotowi, aby udowodnić główne twierdzenie w tym podrozdziale, tzn. wyznaczające zbiór $AP_r(f)$ dla pewnej klasy odwzorowań jednorodnych rozmaitości wymiaru 4 w siebie.

Twierdzenie 4.30. Niech M będzie jednospójną rozmaitością wymiaru 4 odpowiadającą (w rozumieniu Twierdzenia 4.22) unimodularnej, symetrycznej i dodatnio określonej macierzy całkowitoliczbowej $A = [a_{ij}]_{m \times m}$. Dodatkowo niech $f: M \rightarrow M$, $\deg(f) = k > 1$. Wtedy prawdziwe są poniższe stwierdzenia, określające warunki, dla których współczynniki b_n rozwinięcia okresowego liczb Lefschetza (danego wzorem: $b_n = \frac{1}{n} \sum_{l|n} \mu(\frac{n}{l})L(f^l)$) są niezerowe:

- (1) istnieje k_0 takie, że dla wszystkich funkcji, których stopień $k \geq k_0(m) = 6(m+1)^2$ współczynniki $b_n \neq 0$ dla wszystkich n ,
- (2) dla każdej funkcji z zadanyym stopniem k istnieje $n_0(k, m)$ takie, że dla wszystkich $n \geq n_0(k, m) = 2 \log_{\frac{2}{3}k}(2(1+m))$ zachodzi $b_n \neq 0$.

Dowód. Ustalmy liczby naturalne $k > 1$ oraz m i rozpocznijmy od znalezienia oszacowania postaci

$$|nb_n| \geq W(n, k, m),$$

następnie ustalimy, kiedy $W(n, k, m)$ przyjmuje wartości dodatnie.

Z Wniosku 4.24 wyznaczającego wartość liczb Lefschetza $L(f^l)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |nb_n| &= \left| \sum_{l|n} \mu(n/l)L(f^l) \right| \geq |L(f^n)| - \left| \sum_{l|n, l \neq n} \mu(n/l)L(f^l) \right| \\ &= |L(f^n)| - \left| \sum_{l|n, l \neq n} \mu(n/l)(1 + \text{Tr}(P^l) + k^l) \right| \\ &\geq |L(f^n)| - \left| \sum_{l|n, l \neq n} \mu(n/l)(\text{Tr}(P^l) + k^l) + \sum_{l|n, l \neq n} \mu(n/l) \right| \\ &\geq |L(f^n)| - \sum_{l|n, l \neq n} |\mu(n/l)| (|\text{Tr}(P^l)| + k^l) - 1, \end{aligned} \tag{4.12}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z faktu, że $\sum_{l|n} \mu(n/l) = 0$.

Zastosujmy Wniosek 4.29 oraz fakt, że μ przyjmuje wartości ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$. Kontynuując ciąg nierówności z (4.12) otrzymujemy

$$|nb_n| \geq |L(f^n)| - \sum_{l|n, l \neq n} (mk^{\frac{l}{2}} + k^l) - 1 \geq |L(f^n)| - (2\sqrt{n} - 1)(mk^{\frac{n}{4}} + k^{\frac{n}{2}}) - 1. \tag{4.13}$$

Ostatnia nierówność jest konsekwencją faktu, że liczba dzielników liczby n jest mniejsza lub równa od $2\sqrt{n}$ (por. [11]) oraz funkcja $2|k|^{\frac{l}{2}} + |k|^l$ jest rosnąca ze względu na l .

Z drugiej strony z nierówności (4.11) we Wniosku 4.29 otrzymujemy

$$|L(f^n)| = |1 + \text{Tr}(P^n) + k^n| \geq |k^n + 1| - |\text{Tr}(P^n)| \geq k^n - mk^{\frac{n}{2}} + 1. \tag{4.14}$$

Finalnie stosując (4.13) i (4.14) otrzymujemy

$$|nb_n| \geq W(n, k, m) = k^n - mk^{\frac{n}{2}} - (2\sqrt{n} - 1)(mk^{\frac{n}{4}} + k^{\frac{n}{2}}). \tag{4.15}$$

W następnej części dowodu skupimy się na stwierdzeniu (1) zawartym w tezie. Przypomnijmy, że $k > 1$ i $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście jeśli $k^n - (m + (2\sqrt{n} - 1)(m + 1))k^{\frac{n}{2}} > 0$, to $|nb_n| \geq W(n, k, m) > 0$. Możemy rozwiązać nierówność podstawiając $t = k^{\frac{n}{2}}$ i otrzymujemy

$$k^{\frac{n}{2}} > 2(1+m)\sqrt{n} - 1. \quad (4.16)$$

Teraz możemy sprecyzować warunek na stopień topologiczny k , dla którego wszystkie współczynniki b_i rozwinięcia ciągu liczb Lefschetza są niezerowe. Zauważmy, że dla $k^{\frac{n}{2}} > 2(1+m)\sqrt{n}$ zachodzi $|nb_n| = W(n, k, m) > 0$.

Z drugiej strony obie strony nierówności $k^{\frac{n}{2}} \geq 2(1+m)\sqrt{n}$ są dodatnie, więc jest ona równoważna nierówności

$$k \geq \sqrt[n]{(2(1+m))^2 \sqrt[n]{n}}. \quad (4.17)$$

Stosując nierówności $\frac{3}{2} \geq \sqrt[n]{n}$ oraz $(2(1+m))^2 \geq \sqrt[n]{(2(1+m))^2}$, otrzymujemy oszacowanie zależne wyłącznie od m tj. dla każdego $k \geq k_0$ takiego, że $k_0 = 6(m+1)^2$ mamy $|nb_n| = W(n, k, m) > 0$, więc $b_i \neq 0$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$.

Finalnie ostatnia część dowodu będzie poświęcona stwierdzeniu (2) zawartemu w tezie. Niech $m \in \mathbb{N}$ będzie ustalone, dla dowolnej liczby naturalnej $k > 1$ mamy

$$k \geq \frac{3}{2} \sqrt[n]{(2(1+m))^2} \Rightarrow k \geq \sqrt[n]{(2(1+m))^2 \sqrt[n]{n}}$$

oraz

$$k \geq \frac{3}{2} \sqrt[n]{(2(1+m))^2} \Leftrightarrow n > 2 \log_{\frac{2}{3}k}(2(1+m)),$$

więc istnieje $n_0(k, m) = 2 \log_{\frac{2}{3}k}(2(1+m))$ takie, że dla każdego $n > n_0(k, m)$ zachodzi nierówność (4.17), a więc $W(n, k, m)$ przyjmuje wyłącznie dodatnie wartości, stąd również $b_n \neq 0$, co dowodzi stwierdzeniu (2). \square

Wniosek 4.31. *Niech spełnione będą założenia Twierdzenia 4.30, gdzie rozmaitość M_A jest reprezentowana przez macierz A stopnia 2, wtedy współczynniki b_n są różne od 0 dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz $k > 1$ z wyjątkiem następujących przypadków:*

- $k = 2 \wedge n \in \{1, 2, 3, 4\}$,
- $k = 3 \wedge n \in \{1, 2\}$,
- $k = 4 \wedge n \in \{1, 2\}$.

Dowód. Niech $m = 2$, z punktu (1) Twierdzenia 4.30 wiemy, że dla $k \geq k_0 = 54$ współczynniki $b_n \neq 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, natomiast z punktu (2) mamy, że $b_n \neq 0$ dla $n > n_0 = \log_{\frac{2}{3}k}(6)$ oraz dowolnego k . Biorąc pod uwagę oba punkty wystarczy, że sprawdzimy czy wartość $b_n \neq 0$ w przypadkach, gdy $2 \leq k < 54$ i $1 \leq n \leq \log_{\frac{2}{3}k}(6)$. Aby to zrobić użyjemy nierówności (4.13) wyprowadzonej w dowodzie Twierdzenia 4.30:

$$\begin{aligned} |nb_n| &\geq |L(f^n)| - \left| \sum_{l|n, l \neq n} \mu(n/l)(1 + \text{Tr}(P^l) + k^l) \right| \geq \\ &\geq k^n - mk^{\frac{n}{2}} - \left| \sum_{l|n, l \neq n} \mu(n/l)(1 + mk^{\frac{l}{2}} + k^l) \right| \end{aligned} \quad (4.18)$$

Następnie obliczając przypadki jeden po drugim otrzymujemy, że $|nb_n| > 0$ dla wszystkich przypadków oprócz tych zawartych w tezie. \square

4.4.2 Funkcje gładkie 4-wymiarowych rozmaitości z określoną formą przecięcia

W dalszej części pracy powracamy do rozważania funkcji gładkich. Będziemy rozważać rozmaitości gładkie z określoną formą przecięcia, stąd z twierdzenia Donaldsona [15] wiadomo, że forma przecięcia A jest identycznością lub minus identycznością. Wynika stąd, że z dokładnością do homeomorfizmu mamy jedynie dwie rozmaitości gładkie wymiaru 4 z określoną formą przecięcia:

$$A = Id : \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2 \# \dots \# \mathbb{C}P^2, \quad (4.19)$$

$$A = -Id : \overline{\mathbb{C}P^2} \# \overline{\mathbb{C}P^2} \# \dots \# \overline{\mathbb{C}P^2}, \quad (4.20)$$

gdzie $\mathbb{C}P^2$ oznacza zespoloną przestrzeń rzutową, a $\overline{\mathbb{C}P^2}$ oznacza zespoloną przestrzeń rzutową z przeciwną orientacją.

Uwaga 4.32. Z Twierdzenia 4.23 wynikają ograniczenia (czasami bardzo duże) na możliwe wartości stopnia topologicznego $k = \deg(f)$ funkcji f (por. [17]). W przypadku rozważanych przez nas rozmaitości oczywistym ograniczeniem wynikającym z równania (4.7) jest $k \geq 0$ (ponieważ ślad jest sumą kwadratów). Możemy więc zastosować Twierdzenie 4.30 dla wszystkich funkcji o niezerowym stopniu topologicznym zdefiniowanych na naszych modelowych rozmaitościach (4.19) i (4.20).

W pracy [2] D. Baralić przeprowadził dyskusję na temat możliwych stopni funkcji zdefiniowanych na sumach spójnych zespolonych przestrzeni rzutowych (w Podrozdziale 4) oraz innych 4-rozmaitościach.

Uwaga 4.33. Zauważmy, że równanie (4.7) jest takie samo dla $A = Id$ oraz $A = -Id$. Z tego powodu w dalszej części pracy rozważania będą przeprowadzane dla sumy spójnej zespolonych powierzchni rzutowych (4.19) mając na uwadze, że takie same wyniki prawdziwe są również dla przestrzeni rzutowych z przeciwną orientacją (4.20).

W następnym twierdzeniu pokażemy, że zbiór $AP(f)$ dla odwzorowań gładkich sumy spójnej dwóch zespolonych powierzchni rzutowych jest tożsamy ze zbiorem liczb naturalnych.

Twierdzenie 4.34. *Niech $f : \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ będzie funkcją gładką, której stopień jest równy $\deg(f) = k > 1$, wtedy $AP(f) = \mathbb{N}$.*

Dowód. Forma przecięcia rozmaitości $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ dana jest przez macierz identycznościową stopnia 2. Z (4.7) otrzymujemy:

$$PAP^T = k \cdot A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}^T = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Z równania macierzowego (4.21) otrzymujemy równości $k = p_{11}^2 + p_{12}^2$ oraz $k = p_{21}^2 + p_{22}^2$, więc istnieje tylko skończenie wiele możliwych macierzy P spełniających (4.21). Zauważmy, że $k = 2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2$, $k = 3$ nie może zostać rozłożone na sumę dwóch kwadratów liczb całkowitych, $k = 4 = (\pm 2)^2$. Z (4.21) wynika, że wiersze (równoważnie kolumny) macierzy P dla $k = 2$ są kombinacjami ± 1 , a w przypadku $k = 4$ są to kombinacje ± 2 i 0 przedstawione poniżej:

- $k = 2$

$$\pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

- $k = 4$

$$\begin{bmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{bmatrix}.$$

Mając dane możliwe postaci macierzy P , możemy zastosować wzór na liczbę Lefschetza zawarty we Wniosku 4.24:

$$L(f^n) = 1 + \text{tr}(P^n) + (\deg f)^n,$$

a następnie bezpośrednio ze wzoru (2.4) dla ciągu $\{L(f^n)\}_{n=1}^{\infty}$ obliczyć współczynniki b_n rozwinięcia okresowego ciągu liczb Lefschetza dla przypadków $k = 2$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $k = 4$, $n \in \{1, 2\}$. W każdym z przypadków otrzymujemy

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{l|n} \mu\left(\frac{n}{l}\right) L(f^l) \neq 0.$$

Z Wniosku 4.31 mamy, że dla pozostałych przypadków zachodzi $b_n \neq 0$, więc finalnie $AP(f) = \mathbb{N}$. \square

4.4.3 Punkty okresowe odwzorowań transwersalnych

W tej części wykorzystamy opis okresów algebraicznych $AP(f)$ podany w Twierdzeniu 4.30, aby określić istnienie punktów okresowych o danym okresie minimalnym dla funkcji transwersalnych. Rozważamy funkcję transwersalną $f: \mathbb{C}P^2 \# \dots \# \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2 \# \dots \# \mathbb{C}P^2$, tj. taką, która jest klasy C^1 oraz w dowolnym punkcie okresowym $x \in P(f)$ o okresie minimalnym $i \in \mathbb{N}$ jedynka nie należy do spektrum pochodnej i -tej iteracji f w punkcie x ($1 \notin \sigma(Df^i(x))$).

W kolejnym twierdzeniu uogólnimy w wymiarze $n = 4$ wynik rezultatu Guirao i Llibre (Twierdzenie 2 [59]), którzy opisali zbiór minimalnych okresów dla funkcji transwersalnych n -wymiarowych zespolonych powierzchni rzutowych w siebie.

Twierdzenie 4.35. *Niech f będzie odwzorowaniem transwersalnym sumy spójnej m zespolonych powierzchni rzutowych w siebie stopnia $\deg(f) = k$.*

Założmy, że jeden z poniższych warunków jest spełniony:

(i) $k \geq 6(m+1)^2$,

(ii) $k > 1$ jest dowolne oraz $m = 2$,

(iii) $k > 1$ oraz $m > 1$ są dowolne oraz $i \geq 2 \log_{\frac{2}{3}k}(2(1+m))$.

Wtedy $i \in \text{Per}(f)$, jeśli i jest nieparzyste; $i \in \text{Per}(f)$ albo $i/2 \in \text{Per}(f)$, jeśli i jest parzyste.

Dowód. Rozważmy punkt x_0 o okresie minimalnym i oraz jego orbitę $O_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), \dots, f^{i-1}(x_0)\}$. Wtedy z (2.8) wiemy, że istnieją tylko cztery postaci ciągów indeksów punktu stałego orbit:

$$\text{ind}(f^n, O_f(x_0)) = \begin{cases} \text{reg}_i(n), \\ -\text{reg}_i(n), \\ \text{reg}_i(n) - \text{reg}_{2i}(n), \\ -\text{reg}_i(n) + \text{reg}_{2i}(n). \end{cases} \quad (4.22)$$

Z drugiej strony ze wzoru Lefschetza-Hopfa (Twierdzenie 1.18) możemy przedstawić ciąg liczb Lefschetza w następującej postaci:

$$L(f^n) = \sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} \text{ind}(f^n, x) = \sum_i \sum_{O \in \text{Orb}_i(f)} \text{ind}(f^n, O), \quad (4.23)$$

gdzie $\text{Orb}_i(f)$ oznacza zbiór i -orbit funkcji f oraz każda orbita O ma indeks postaci (4.22). Reprezentujemy $\{L(f^n)\}_{n=1}^{\infty}$ w postaci rozwinięcia okresowego (2.3):

$$L(f^n) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \text{reg}_i(n). \quad (4.24)$$

Porównajmy teraz wzory (4.24) z (4.23). Z jednej strony z Twierdzenia 4.30 i Twierdzenia 4.34 dla k, m oraz i spełniających jeden z warunków (i)-(iii) mamy $b_i \neq 0$, z drugiej strony we wzorze (4.23) mamy sumę indeksów orbit postaci (4.22). Biorąc pod uwagę, że wpływ na wartość b_i mają indeksy orbit punktów okresowych o okresie i lub $i/2$ otrzymujemy tezę. \square

4.4.4 Wartość $D_r^4[f]$ dla r będącego iloczynem różnych liczb pierwszych

Posiadamy już metody kombinatoryczne znajdowania $D_r^m[f]$ przedstawione w Podrozdziale 4.3 (m.in. Twierdzenie 4.13), jednakże, aby ich użyć musimy znać zbiór okresów algebraicznych $AP_r(f)$. W tym rozdziale postaramy się wyznaczyć zbiór $AP_r(f)$ dla funkcji określonych na pewnej podklasie rozważanych przez nas rozmaitości 4-wymiarowych.

W ogólności znajdowanie $D_r^4[f]$ jest trudnym zadaniem, jednak w niektórych przypadkach wartość niezmiennika może zostać dokładnie wyznaczona.

Twierdzenie 4.36. *Niech f będzie funkcją gładką sumy spójnej m zespolonych powierzchni rzutowych, $\deg(f) = k$ oraz $r = p_1 \dots p_v$ będzie iloczynem różnych liczb pierwszych.*

Założmy, że jeden z poniższych warunków jest spełniony:

(i) $k \geq 6(m+1)^2$,

(ii) $k > 1$ jest dowolne oraz $m = 2$.

Wtedy wartość $D_r^4[f]$ mod $\text{reg}_{1,2}$ zależy wyłącznie od v i jest równa

$$D_r^4[f] \text{ mod } \text{reg}_{1,2} = \frac{2^v + (-1)^{v+1}}{3}. \quad (4.25)$$

Jeśli

(iii) $k > 1$ oraz $m > 1$ jest dowolne oraz $i \geq 2 \log_{\frac{2}{3}k}(2(1+m)) := r_0$, wtedy

$$\frac{2^{v'} - 1}{3} + \left\lceil \frac{\#G(r_0)}{3} \right\rceil \leq D_r^4[f] \bmod \text{reg}_{1,2} \leq \frac{2^v + (-1)^{s+1}}{3}, \quad (4.26)$$

gdzie v' oznacza liczbę elementów w zbiorze $\{p_1, \dots, p_v\}$, które są $\geq r_0$ oraz

$$G(r_0) = \{\beta | r : \beta \geq r_0 \wedge \exists_{\alpha | r, \alpha \neq 1} \alpha < r_0 \wedge \alpha | \beta\}.$$

Dowód. Zauważmy, że dla $r = p_1 \dots p_v$ przy założeniu (i), (ii) z Twierdzenia 4.30 otrzymujemy, że $AP(f) = \mathbb{N}$ (a więc również $AP_r(f) = \text{Div}(r)$), stąd z Twierdzenia 4.18 mamy

$$D_r^4[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = \left\lceil \frac{2^v - 1}{3} \right\rceil = \frac{2^v + (-1)^{v+1}}{3}.$$

To kończy dowód wzoru (4.25).

W celu udowodnienia (4.26) zauważmy, że z Twierdzenia 4.30 współczynniki b_i rozwinięcia okresowego liczb Lefschetza postaci (4.24) są różne od 0 dla $i \geq r_0$, gdzie r_0 jest ustaloną liczbą. Załóżmy, że dokładnie s' liczb spośród zbioru liczb pierwszych $\{p_1, \dots, p_s\}$ jest większych lub równych od r_0 .

Ponownie korzystając z Twierdzenia 4.18 otrzymujemy, że aby zrealizować niezerowe współczynniki o indeksach $\text{LCM}(\{p_1, \dots, p_s\})$, potrzebujemy co najmniej $\frac{2^{s'} - 1}{3} DD^4(1)$ ciągów. Z drugiej strony wiemy już, że potrzeba maksymalnie $\frac{2^v + (-1)^{v+1}}{3}$ ciągów, aby zrealizować $\text{Div}(r)$. W konsekwencji otrzymujemy oszacowanie

$$\frac{2^{s'} - 1}{3} \leq D_r^4[f] \bmod \text{reg}_{1,2} \leq \frac{2^s + (-1)^{s+1}}{3}. \quad (4.27)$$

Jednakże możemy wzmocnić dolne oszacowanie (4.27) przez wzięcie pod uwagę elementów zbioru $G(r_0)$. $G(r_0)$ zawiera dzielniki β liczby r , które spełniają, nierówność $\beta \geq r_0$, ale same dzielą się przez liczby $\alpha < r_0$. Oczywiście takie liczby β zawierają się w $AP_r(f)$ stąd należałoby je uwzględnić w oszacowaniu. Każdy $DD^4(1)$ realizuje co najwyżej 3 regi, więc aby zrealizować wszystkie ciągi bazowe reg_i dla $i \in G(r_0)$, potrzeba co najmniej $\left\lceil \frac{\#G(r_0)}{3} \right\rceil DD^4(1)$. To kończy dowód oszacowania (4.26). \square

4.5 Algorytmiczne podejście do znajdowania $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$

W Podrozdziale 4.3 przedstawiliśmy metody kombinatoryczne badania wartości $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$. Niestety trudność obliczania wartości niezmiennika zwiększa się bardzo szybko wraz ze wzrostem liczebności zbioru $AP_r(f)$. Warto więc wyprowadzić algorytm, który pozwoli na przeprowadzenie obliczeń komputerowych. Algorytm obliczania $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_1$ dla nieparzystych r został wprowadzony w [52]. Poniżej przedstawimy algorytm znajdowania $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$ dla dowolnych $r \in \mathbb{N}$.

W Twierdzeniu 4.34 pokazaliśmy, że zbiór okresów algebraicznych $AP(f)$ funkcji $f: \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ pokrywa się z \mathbb{N} . W konsekwencji $AP_r(f) = \text{Div}(r)$, gdzie $\text{Div}(r)$ oznacza zbiór wszystkich dzielników r . Stosując ten fakt, skorzystamy z Twierdzenia 4.13 do obliczenia $D_r^4[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$ dla małych wartości r za pomocą programu komputerowego. Pseudokod programu został zaprezentowany poniżej jako Algorytm 1.

Algorithm 1: Algorytm obliczania $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$

Data: $AP_r(f), m, r$
Result: $h = D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$

```

1  $h \leftarrow 0$ ;
2 if  $AP_r(f) \neq \emptyset$  then
3    $h \leftarrow 1$ ;
4   if  $m$  jest nieparzyste i  $r$  jest parzyste then
5      $\mathcal{B} \leftarrow \{B \cup \{2\} : B \subset AP_r(f) \setminus \{1, 2\} \wedge \#B = \frac{m-1}{2}\}$ ;
6   else
7      $\mathcal{B} \leftarrow \{B : B \subset AP_r(f) \setminus \{1\} \wedge \#B = \frac{m}{2}\}$ ;
8    $\overline{\mathcal{B}} \leftarrow \{\text{LCM}(Q) : Q \subset B\} : B \in \mathcal{B}\}$ ;
9    $\overline{\mathcal{B}}_f, \text{SUM}_f \leftarrow \{F \in \overline{\mathcal{B}} : F \text{ nie jest podzbiorem żadnego } z G \in \overline{\mathcal{B}}_f\}$ ;
10  while  $\#\text{SUM}_f \neq 1$  do
11     $\text{SUM} \leftarrow \{U \cup W : U \in \text{SUM}_f \wedge W \in \overline{\mathcal{B}}_f\}$ ;
12     $\text{SUM}_f \leftarrow \{F \in \text{SUM} : F \text{ nie jest podzbiorem żadnego } z G \in \text{SUM}\}$ ;
13     $h \leftarrow h + 1$ ;
14 return  $h$ ;

```

Konstrukcja algorytmu może być przedstawiona w następujący sposób. Dane wejściowe składają się: ze zbioru minimalnych okresów $AP_r(f)$ funkcji $f: M \rightarrow M$, $m \in \mathbb{N}$ odpowiadającego wymiarowi rozmaitości M oraz r odpowiadającemu minimalnemu okresowi punktów, których ilość zamierzamy zliczyć. Daną wyjściową jest wartość niezmiennika $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$.

W 1. linii przypisujemy zmiennej h wartość początkową 0 oraz jeśli $AP_r(f)$ jest niepusty (linia 2.), rozpoczynamy właściwą część algorytmu przez przypisanie wartości $h = 1$ (linia 3.).

W dalszej części chcemy stworzyć rodzinę zbiorów \mathcal{B} , z której można wybrać minimalny rozkład lub minimalny rozkład z dwójką, w zależności od tego, który z przypadków Twierdzenia 4.13 zachodzi dla danych wejściowych.

W linii 4. jeśli m nieparzyste i r parzyste, to $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = H_2(AP_r(f); l)$.

Następnie w 5. linii tworzymy zmienną \mathcal{B} zawierającą rodzinę podzbiorów $AP_r(f)$ składających się z $\frac{m+1}{2}$ liczb (w tym każdy zawiera 2). Z takiej rodziny oczywiście możemy wybrać minimalny rozkład z dwójką zbioru $AP_r(f)$. Jeśli warunek w 4. linii nie jest spełniony, to $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = H(AP_r(f); l)$ i w 7. linii tworzymy zmienną \mathcal{B} zawierającą rodzinę podzbiorów $AP_r(f)$ składających się z $\frac{m}{2}$ dowolnych liczb. Z tak wybranej rodziny możemy wybrać minimalny rozkład zbioru $AP_r(f)$.

Teraz, gdy wiemy już, który z przypadków Twierdzenia 4.13 rozważamy, w dalszej części algorytmu (linia 8.) tworzymy zmienną $\overline{\mathcal{B}}$ zawierającą rodzinę zbiorów postaci \overline{B}_i , gdzie $B_i \in \mathcal{B}$. Spośród zbiorów rodziny $\overline{\mathcal{B}}$ można wybrać najmniejszą liczbę zbiorów, których suma spełni warunek (2) Definicji 4.7.

W 8. linii definiujemy dwie zmienne $\overline{\mathcal{B}}_f, \text{SUM}_f$ i przypisujemy im wartość przefiltrowanego zbioru $\overline{\mathcal{B}}$, pozostawiając wyłącznie istotne zbiory tzn. takie, które nie zawierają w sobie innego zbioru z $\overline{\mathcal{B}}$. Filtracja pozwala na zmniejszenie ilości elementów rodzin, a tym samym na rozważenie mniejszej ilości przypadków w algorytmie. Oczywiście taka filtracja nie wpływa w żaden sposób na wartość $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$. Istotnie, jeśli $\bigcup_{i=1}^h \overline{B}_i = AP_r(f)$, gdzie $\overline{B}_i \in \overline{\mathcal{B}}$ oraz dla pewnego j zbiór $\overline{B}_j \subset G$ dla pewnego $G \in \overline{\mathcal{B}}$, wtedy możemy po prostu zastąpić \overline{B}_j przez G . Ideą rodziny SUM_f jest zawieranie wszystkich przefiltrowanych sum h elementów z $\overline{\mathcal{B}}_f$. Oczywiście, gdy $h = 1$, to $\overline{\mathcal{B}}_f = \text{SUM}_f$. Zauważmy, że jeśli $\#\text{SUM}_f = 1$, to $AP_r(f) \in \text{SUM}_f$. W 10. linii rozpoczynamy pętlę, dopóki $\#\text{SUM}_f \neq 1$ definiujemy zmienną SUM (linia 11) zawierającą rodzinę zbiorów, w której do każdego zbioru rodziny SUM_f dodajemy zbiór rodziny $\overline{\mathcal{B}}_f$. Po tej operacji w 12. linii zmienna SUM jest filtrowana, a w linii 13. h rośnie o 1. Finalnie, gdy pętla zakończy działanie, w linii 14. zostanie zwrócona wartość zmiennej h równa $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$.

Teraz przedstawimy wyniki obliczeń dla małych wartości r . Zauważmy, że trudność obliczeń rośnie szybko wraz ze wzrostem liczby dzielników r . Liczność zbioru SUM rośnie w każdym kroku $\#\text{SUM} = \#\text{SUM}_f \cdot \#\overline{\mathcal{B}}_f$ co wiąże się z wysokim czasem obliczeń kolejnych iteracji rodziny SUM_f oraz problemem z wypełnieniem pamięci.

Zwróćmy uwagę, że zwykle z punktu widzenia zastosowań, wartości rozważanych okresów nie są wysokie, zatem nasze obliczenia mogą okazać się użyteczne.

Przypomnijmy, że z Uwagi 4.17 w przypadku, gdy wymiar $\dim M$ jest parzysty, to wartość szukanego niezmiennika zależy wyłącznie od zbioru potęg a_i czynników liczby $r = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, tj. $M = \{a_i : r = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}\}$. W przypadku, gdy wymiar $\dim M$ jest nieparzysty, należy wziąć jeszcze pod uwagę potęgę przy dwójce w faktoryzacji r .

Tabela 4.1 zawiera wartości $D_r^4[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$ dla r takich, że multizbiór $M = \{a_i : r = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}\}$. W Lemacie 4.17 pokazaliśmy, że niezmiennik $D_r^4[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$ zależy wyłącznie od postaci zbioru M . Aby zilustrować przypadki M pokazanych w tabeli zauważmy, że pokrywają one wartości niezmiennika dla $1 \leq r \leq 2000$, gdy r jest nieparzyste oraz $1 \leq r \leq 250$, gdy r jest parzyste. Jednakże rozważane przypadki są dużo bardziej szersze, ponieważ M odpowiada nieskończenie wielu liczbom naturalnym, tj. do $r_1 = 27$ i $r_2 = 12167$ możemy przyporządkować zbiór $M = \{3\}$.

M	$D_r^4[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$
{1}	1
{1, 1}	1
{1, 1, 1}	2
{1, 1, 1, 1}	5
{2}	1
{2, 1}	2
{2, 2}	3
{2, 1, 1}	4
{2, 2, 1}	6
{3}	1
{3, 1}	2
{3, 2}	4
{3, 3}	5
{3, 1, 1}	5
{4}	2
{4, 1}	3
{5}	2
{5, 1}	4
{6}	3
{6, 1}	5
{7}	3

Tabela 4.1: Wartości $D_r^4[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$ dla $M = \{a_i : r = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}\}$

Przykład 4.37. Niech $f: \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ będzie funkcją gładką stopnia $\deg(f) = k > 1$ oraz $r = p_1^2 \cdot p_2^2$ będzie liczbą naturalną taką, że p_1, p_2 są liczbami pierwszymi (np. $r = 36$ lub $r = 1225$).

Pytamy o minimalną liczbę punktów r -okresowych w gładkiej klasie homotopii f . W naszym przypadku $M = \{2, 2\}$, z Tabeli 4.1 otrzymujemy, że poszukiwane minimum jest równe (z dokładnością do $\text{mod } \text{reg}_{1,2}$) wartości $D_r^4[f] \bmod \text{reg}_{1,2} = 3$.

Zauważmy, że w przypadku, gdy współczynniki b_1 i b_2 rozwinięcia okresowego liczb Lefschetza iteracji f są znane, to z Twierdzenia 4.20 jesteśmy w stanie określić dokładną wartość $D_r^4[f]$, która jest równa $D_r^4[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$ lub $D_r^4[f] \bmod \text{reg}_{1,2} + 1$ (więc w naszym przypadku 3 lub 4).

Podczas prac badawczych zostały wykonane, a następnie opublikowane w [43] obliczenia wartości $D_r^m[f] \bmod \text{reg}_{1,2}$ dla nieparzystych $r \in \{1, \dots, 2000\}$ oraz $m \in \{4, \dots, 13\}$. Z niezmiennikiem Dolda związany jest również niezmiennik Jezierskiego $J[f]$, który równy jest minimalnej liczbie punktów okresowych o okresach mniejszych lub równych r w gładkiej klasie homotopii (zob. [37, 38]). Bazując na modyfikacji powyższego algorytmu wykonaliśmy obliczenia $J[f]$ w przypadku zamkniętych rozmaitości jednospójnych wymiaru $m \in \{4, \dots, 8\}$, których suma rang grup homologii jest mniejsza lub równa 10. Wyniki obliczeń zostały opublikowane na portalu Most Danych [44, 45, 46, 47, 48].

Rozdział 5

Minimalizacja liczby punktów okresowych w gładkiej klasie homotopii dla rozmaitości z brzegiem

W Rozdziale 4 rozważaliśmy problem minimalizacji dla funkcji gładkich zdefiniowanych na zwartej, jednorodnej rozmaitości bez brzegu. W tym rozdziale M będzie zwartą, jednorodną rozmaitością z jednorodnym brzegiem.

Jak wspomnieliśmy wcześniej, $N(f)$ minimalizuje liczbę punktów stałych również w gładkiej klasie homotopii funkcji zdefiniowanych na zamkniętych i jednorodnych rozmaitościach. Okazuje się, że w przypadku gładkich funkcji par $f: (M, \partial M) \rightarrow (M, \partial M)$ sytuacja jest inna. W pracy [10] R. F. Brown, R. E. Greene oraz H. Schirmer rozważali gładką rozmaitość M z gładkim brzegiem ∂M oraz funkcję gładką $\phi: \partial M \rightarrow \partial M$. Autorzy pytali, czy istnieje rozszerzenie $f: M \rightarrow M$ funkcji ϕ bez punktów stałych w $\text{Int } M$. Okazuje się, że odpowiedź różni się w zależności od tego, czy rozważamy rozszerzenie gładkie, czy tylko ciągłe. Przykład dla tego problemu został przedstawiony w [9], gdzie przyjęto $\phi: S^1 \rightarrow S^1$ dane wzorem $\phi(z) = z^k$ dla $k \in \{2, 3, \dots\}$. Wskazano rozszerzenie ciągłe z jednym punktem stałym oraz udowodniono, że każde gładkie rozszerzenie $f: B^2 \rightarrow B^2$ odwzorowania ϕ ma punkt stały w $\text{Int } B^2$. Innymi słowy, minimalna liczba punktów stałych w gładkiej klasie homotopii tak zdefiniowanej funkcji par f jest równa 2.

W 2017 roku G. Graff i J. Jezierski [34] zdefiniowali niezmiennik $D_r(f; M, \partial M)$ rozwiązujący problem minimalizacji liczby punktów okresowych w gładkiej klasie homotopii funkcji par na zwartych, jednorodnych rozmaitościach z jednorodnym brzegiem. Badania dotyczące tego niezmiennika będą tematem poniższego rozdziału.

5.1 Konstrukcja niezmiennika $D_r(f; M, \partial M)$

Będziemy korzystać z następującej notacji:

$$\mathbb{R}_+^{m+1} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : t \geq 0\}, \quad \mathbb{R}_0^{m+1} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : t = 0\}.$$

Definicja 5.1. Funkcję $f: (A, B) \rightarrow (A, B)$ nazywamy funkcją par, jeśli $B \subset A$, $f: A \rightarrow A$ oraz $f(B) \subset B$. Jeśli będziemy chcieli zwrócić uwagę na działanie funkcji

f na zbiorze B , to będziemy stosować oznaczenie $(f, \bar{f}): (A, B) \rightarrow (A, B)$, gdzie $\bar{f} := f|_B$.

Definicja 5.2. Uporządkowaną parę ciągów liczb całkowitych $(\{c(n)\}_{n=1}^{\infty}, \{\bar{c}(n)\}_{n=1}^{\infty})$ nazywamy $\partial DD^m(1)$ ciągiem, jeśli istnieje izolowany punkt stały $p \in \mathbb{R}_0^{m+1}$, jego otwarte otoczenie $U_+^{m+1} \subset \mathbb{R}_+^{m+1}$ oraz funkcja par klasy C^1

$$(\phi, \bar{\phi}): (U_+^{m+1}, U_0^{m+1}) \rightarrow (\mathbb{R}_+^{m+1}, \mathbb{R}_0^{m+1}),$$

($U_0^{m+1} = U_+^{m+1} \cap \mathbb{R}_0^{m+1}$) takich, że $(c(n), \bar{c}(n)) = (\text{ind}(\phi^n, p), \text{ind}(\bar{\phi}^n, p))$. Skończoną uporządkowaną parę ciągów $(\{c(n)\}_{n|r}, \{\bar{c}(n)\}_{n|r})$ nazywamy $\partial DD^m(1|r)$ parą ciągów, jeśli równość zachodzi dla wszystkich $n|r$, gdzie r jest ustalone.

Dla uproszczenia oznaczeń wprowadzamy następującą notację:

- $(\{c(n)\}_{n=1}^{\infty}, \{\bar{c}(n)\}_{n=1}^{\infty}) := (c(n), \bar{c}(n))_{n=1}^{\infty}$,
- $(\{c(n)\}_{n|r}, \{\bar{c}(n)\}_{n|r}) := (c(n), \bar{c}(n))_{n|r}$.

W Podrozdziale 5.2 podamy pełną charakteryzację $DD^m(1|r)$ oraz $\partial DD^m(1|r)$ ciągów.

Definicja 5.3. Niech r będzie ustaloną liczbą naturalną, $(f, \bar{f}): (M, \partial M) \rightarrow (M, \partial M)$ oraz dany będzie rozkład liczb Lefschetza iteracji

$$L(f^n) = \sum_{j=1}^{\alpha} d_j(n) + \sum_{i=1}^{\beta} c_i(n) \quad (5.1)$$

oraz

$$L(\bar{f}^n) = \sum_{i=1}^{\beta} \bar{c}_i(n), \quad (5.2)$$

dla $n|r$, gdzie $\{d_j\}_{n|r}$ są $DD^{m+1}(1|r)$ ciągami oraz $(c_i(n), \bar{c}_i(n))_{n|r}$ są $\partial DD^m(1|r)$ parami ciągów. Każdy taki rozkład określa pewną sumę $\alpha + \beta$. Liczbę $D_r(f; M, \partial M)$ definiujemy jako najmniejsze $\alpha + \beta$, które można otrzymać w ten sposób.

Definicja 5.4. Dowolny zbiór $\alpha + \beta$ ciągów stanowiących minimalny rozkład w sensie Definicji 4.2 będziemy nazywali minimalną realizacją.

Twierdzenie 5.5. (Twierdzenie 2.10 [34]) Niech M będzie gładką, zwartą i jednopójną rozmaitością wymiaru $m \geq 4$ z jednospójnym brzegiem ∂M oraz $r \in \mathbb{N}$ będzie ustalone. Niech $(f, \bar{f}): (M, \partial M) \rightarrow (M, \partial M)$ będzie funkcją par klasy C^1 . Wtedy

$$D_r(f; M, \partial M) = \min_{(g, \bar{g}) \sim (f, \bar{f})} \# \text{Fix}(g^r).$$

5.2 Indeksy punktów r -okresowych odwzorowań zachowujących brzeg

Będziemy rozważać wyłącznie nieparzyste r . Poniżej przedstawimy pełną listę $\partial DD(1|r)$ ciągów dla nieparzystych iteracji funkcji f .

Twierdzenie 5.6 (Twierdzenie 3.15 [34]). Niech $(f, \bar{f}): (\mathbb{R}_+^{m+1}, \mathbb{R}_0^{m+1}) \rightarrow (\mathbb{R}_+^{m+1}, \mathbb{R}_0^{m+1})$ będzie funkcją par klasy C^1 z izolowanym punktem stałym $(0, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+$ dla każdej iteracji oraz $m \geq 3$. Wtedy,

- dowolna para ciągów lokalnych indeksów punktu stałego iteracji $\{\text{ind}(f^n, (0, 0))\}_{n=1}^\infty$ oraz $\{\text{ind}(\bar{f}^n, 0)\}_{n=1}^\infty$ dla nieparzystych n posiada jedną z następujących form danych w (I) dla nieparzystych m oraz (II) dla parzystych m (z $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$);
- Dowolna para ciągów całkowitych, która jest w postaci przedstawionej w poniższych listach może zostać zrealizowana jako para ciągów lokalnych indeksów punktu stałego iteracji pewnej funkcji par $(f, \bar{f}): (\mathbb{R}_+^{m+1}, \mathbb{R}_0^{m+1}) \rightarrow (\mathbb{R}_+^{m+1}, \mathbb{R}_0^{m+1})$ klasy C^1 , tzn. jest $\partial DD^m(1)$ parą ciągów.

(I) Dla nieparzystych m :

$$(A^o) \quad \text{ind}(\bar{f}^n, 0) = \sum_{k \in L(\frac{m-3}{2})} a_k \text{reg}_k(n), \quad \text{ind}(f^n, (0, 0)) = \sum_{k \in L(\frac{m-3}{2})} b_k \text{reg}_k(n).$$

$$(B^o), (C^o), (D^o) \quad \text{ind}(\bar{f}^n, 0) = \sum_{k \in L(\frac{m-1}{2})} a_k \text{reg}_k(n), \quad \text{ind}(f^n, (0, 0)) = \sum_{k \in L(\frac{m-1}{2})} b_k \text{reg}_k(n),$$

gdzie b_1 jest dowolne oraz

$$a_1 = \begin{cases} 1 & \text{w przypadku } (B^o), \\ -1 & \text{w przypadku } (C^o), \\ 0 & \text{w przypadku } (D^o). \end{cases}$$

(II) Dla parzystych m :

$$(B^e) \quad \text{ind}(\bar{f}^n, 0) = \sum_{k \in L(\frac{m-2}{2})} a_k \text{reg}_k(n), \quad \text{ind}(f^n, (0, 0)) = \sum_{k \in L(\frac{m-2}{2})} b_k \text{reg}_k(n),$$

$$(F_{\partial_0}^e), (F_{\partial_1}^e) \quad \text{ind}(\bar{f}^n, 0) = \sum_{k \in L(\frac{m}{2})} a_k \text{reg}_k(n), \quad \text{ind}(f^n, (0, 0)) = \sum_{k \in L(\frac{m}{2})} b_k \text{reg}_k(n),$$

gdzie $a_1 = 1$ oraz

$$b_1 = \begin{cases} 0 & \text{w przypadku } (F_{\partial_0}^e), \\ 1 & \text{w przypadku } (F_{\partial_1}^e). \end{cases}$$

5.3 Redukcja punktów r -okresowych do jednego punktu dla odwzorowań par sfery w siebie

W tym podrozdziale zajmiemy się pytaniem, kiedy $D_r(f; M, \partial M)$ jest równy jeden (lub zero). Przypomnijmy, że z Twierdzenia 5.1 zawartego w [63], własność ta zachodzi dla funkcji ciągłych rozmaitości jednospójnych w siebie. Poniżej odpowiemy na to pytanie, dla funkcji par domkniętej kuli w siebie wymiaru $m \geq 4$.

Rozpocznijmy od zacytowania twierdzenia pomocniczego.

Twierdzenie 5.7 (Twierdzenie 4.1 [34]). *Niech M będzie zwartą i jednospójną rozmaitością z jednospójnym brzegiem ∂M , r będzie nieparzystą liczbą naturalną oraz $(f, \bar{f}): (M, \partial M) \rightarrow (M, \partial M)$ będzie funkcją par. Załóżmy, że $\{L(f^n)\}_{n|r}$ nie jest stale równy 0. Wtedy istnieje funkcja par $(g, \bar{g}): (M, \partial M) \rightarrow (M, \partial M)$, C^1 -homotopijna z (f, \bar{f}) taka, $\text{Fix}(g^r) = \{q\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z poniższych warunków jest spełniony:*

- (1) $L(\bar{f}^n) = 0$ dla każdego $r|n$ oraz $\{L(f^n)\}_{n|r}$ jest $DD^{m+1}(1|r)$ ciągiem,
- (2) para ciągów $(L(f^n), L(\bar{f}^n))_{n|r}$ jest $\partial DD^m(1|r)$ parą ciągów.

Dowód Twierdzenia 5.7 wynika z faktu, że $D_r(f; M, \partial M) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = 1$ i $\beta = 0$ (co jest równoważne przypadkowi (1)) albo $\alpha = 0$ i $\beta = 1$ (co jest równoważne przypadkowi (2)) por. [34], gdzie liczby α i β są takie jak w Definicji 5.3.

Poniższy lemat wprowadzimy w celu udowodnienia Twierdzenia 5.11.

Lemat 5.8. *Niech $r \in \mathbb{N}$ będzie postaci $r = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, gdzie p_i są liczbami pierwszymi dla $i = 1, \dots, k$. Wtedy $U = \{p_1, p_1^2, \dots, p_1^{\alpha_1}, p_2, \dots, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k, \dots, p_k^{\alpha_k}\}$ określa najmniejszy zbiór taki, że*

$$\bar{U} = \{\text{LCM}(Q) : Q \subset U\} = \text{Div}(r). \quad (5.3)$$

Dowód. Oczywiście dla U zdefiniowanego w tezie zachodzi równość (5.3). Z drugiej strony,

$$\text{LCM}(\{p_i^s, p_j^t\}) = p_i^s p_j^t \quad \text{dla } i \neq j; \quad \text{oraz } \text{LCM}(\{p_i^s, p_i^t\}) = p_i^{\max\{s,t\}}.$$

Stąd dla każdego $g = p_i^u$, gdzie $1 \leq u \leq \alpha_i$, mamy

$$g \notin \overline{\text{Div}(r) \setminus \{g\}}.$$

Zatem zbiór U jest najmniejszym zbiorem spełniającym (5.3). □

Poniżej udowodnimy dobrze znany wzór opisujący postać liczb Lefschetza odwzorowań sfery w siebie.

Lemat 5.9. *Niech $g: S^m \rightarrow S^m$ będzie funkcją ciągłą stopnia D , wtedy $L(f^n) = 1 + (-1)^m D^n$.*

Dowód. Niech $f: S^m \rightarrow S^m$ będzie funkcją ciągłą dla $m \geq 1$. Przypomnijmy, że grupy homologii S^n nad ciałem \mathbb{Q} są równe

$$H_i(S^m, \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{dla } i \in \{0, m\}, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Homomorfizmy indukowane f^n mają postać $f_{*0}^n = id$, $f_{*0}^n = 0$ dla $i = 1, \dots, m-1$ oraz $f_{*m}^n(z) = D^n z$, gdzie $D \in \mathbb{Z}$ jest stopniem topologicznym f (por. 1.6). Z Definicji 1.12 liczby Lefschetza mamy $L(f^n) = 1 + (-1)^m D^n$. □

Lemat 5.10 (Twierdzenie 1.2 [79]). *Niech $f: S^m \rightarrow S^m$ będzie funkcją stopnia D oraz b_n oznacza n -ty współczynnik rozwinięcia okresowego ciągu $\{L(f^n)\}_{n=1}^\infty$ wtedy:*

- (a) $b_1 = 1 + (-1)^m D$,
- (b) $b_2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $D \in \{0, 1\}$,
- (c) Jeśli $n > 2$, wtedy $b_n = 0$ wtedy i tylko wtedy $D \in \{-1, 0, 1\}$.

Teraz jesteśmy gotowi, aby udowodnić główne twierdzenie tego podrozdziału.

Twierdzenie 5.11. Niech $B^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ będzie zamkniętą $(m+1)$ -wymiarową kulą z brzegiem $\partial B^{m+1} = S^m$, gdzie $m \geq 3$. Rozważmy funkcję par $(f, \bar{f}): (B^{m+1}, S^m) \rightarrow (B^{m+1}, S^m)$ klasy C^1 . Niech D oznacza stopień odwzorowania \bar{f} sfery S^m oraz r będzie ustaloną liczbą naturalną postaci $r = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, gdzie p_i są liczbami pierwszymi dla $i = 1, \dots, k$. Wtedy zredukowanie liczby punktów r -okresowych w gładkiej (C^1) klasie homotopii funkcji par (f, \bar{f}) do jednego punktu jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z następujących warunków jest spełniony:

$$(a) \quad D \in \{-1, 0, 1\},$$

$$(b_o) \quad m \text{ jest nieparzyste oraz } \sum_{i=1}^k \alpha_i \leq \frac{m-3}{2},$$

$$(b_e) \quad m \text{ jest parzyste oraz } \sum_{i=1}^k \alpha_i \leq \frac{m-2}{2},$$

$$(c) \quad D = 2, m \text{ jest nieparzyste oraz } \sum_{i=1}^k \alpha_i \leq \frac{m-1}{2}.$$

Dowód. W części (I) dowodu pokażemy, że liczba punktów r -okresowych może zostać zredukowana do jednego punktu, jeśli jeden z warunków (a), (b), (c) jest spełniony. W części (II) dowodu pokażemy implikację w drugą stronę.

Część (I). W pierwszej kolejności rozważmy przypadek dla m nieparzystego. Z Lematu 5.9 otrzymujemy równość $L(\bar{f}^n) = 1 - D^n$, ponadto $L(f^n) = \text{reg}_1(n)$, ponieważ B^m jest ściągalny. Z Twierdzenia 5.6 wiemy, że na (S^m, B^{m+1}) mogą zostać zrealizowane następujące $\partial DD^m(1|r)$ pary ciągów $(c(n), \bar{c}(n))_{n|r}$ postaci:

$$(a) \quad \bar{c}(n) = \sum_{k \in L(\frac{m-3}{2})} a_k \text{reg}_k(n), \quad c(n) = \sum_{k \in L(\frac{m-3}{2})} b_k \text{reg}_k(n)$$

dla $n|r$ oraz dowolnych $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$,

(β)

$$\bar{c}(n) = \delta \text{reg}_1(n) + \sum_{k \in L(\frac{m-1}{2}) \setminus \{1\}} a_k \text{reg}_k(n), \quad c(n) = \sum_{k \in L(\frac{m-1}{2})} b_k \text{reg}_k(n)$$

dla $n|r$ oraz dowolnych $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$ i $\delta \in \{-1, 0, 1\}$.

Pokażemy, że w każdym z przypadków (a), (b_o), (c) zachodzi jeden z warunków (1) lub (2) Twierdzenia 5.7.

- (a) W przypadku $D = 1$ warunek (1) Twierdzenia 5.7 zachodzi, ponieważ $L(\bar{f}^n) = 0$ oraz $\{L(f^n)\}_{n|r} = \{1\}_{n|r} = \{\text{reg}_1(n)\}_{n|r}$ są $D^{m+1}(1|r)$ ciągami. W przypadku $D = 0$ i $D = -1$ warunek (2) Twierdzenia 5.7 jest zrealizowany:

$$(L(f^n), L(\bar{f}^n))_{n|r} = \begin{cases} (\text{reg}_1(n), \text{reg}_1(n))_{n|r} & \text{dla } D = 0, \\ (\text{reg}_1(n), 2\text{reg}_1(n))_{n|r} & \text{dla } D = -1, \end{cases}$$

są parami $\partial DD^m(1|r)$ ciągów typu (α).

(b_o) Niech $r = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, gdzie $\sum_{i=1}^k \alpha_i \leq \frac{m-3}{2}$. Zdefiniujmy zbiór

$$\mathbb{L} := \overline{\{p_1, \dots, p_1^{\alpha_1}, p_2, \dots, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k, \dots, p_k^{\alpha_k}\}}. \quad (5.4)$$

Zauważmy, że (z Lematu 5.3) \mathbb{L} posiada postać zbioru $L(\frac{m-3}{2})$. Wynika stąd, że para ciągów $(\text{reg}_1(n), \sum_{k|r} b_k \text{reg}_k(n))_{n|r} = (\text{reg}_1(n), \sum_{k \in \mathbb{L}} b_k \text{reg}_k(n))_{n|r}$ jest $\partial DD^m(1|r)$ parą ciągów typu (α) , w związku z tym warunek (2) Twierdzenia 5.7 jest spełniony.

(c) Niech $r = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, gdzie $\sum_{i=1}^k \alpha_i \leq \frac{m-1}{2}$. Przyjmijmy $D = 2$, wtedy $b_1 = L(\bar{f}) = -1$. Zdefiniujmy zbiór \mathbb{L} za pomocą tego samego wzoru co (5.4), który ponownie jest postaci $L(\frac{m-1}{2})$. Para ciągów

$$(\text{reg}_1(n), -\text{reg}_1(n) + \sum_{\substack{k|r \\ k \neq 1}} b_k \text{reg}_k(n))_{n|r} = (\text{reg}_1(n), -\text{reg}_1(n) + \sum_{k \in \mathbb{L} \setminus \{1\}} b_k \text{reg}_k(n))_{n|r}$$

jest $\partial DD^m(1|r)$ parą ciągów typu (β) , zatem również w tym przypadku warunek (2) Twierdzenia 5.7 jest spełniony.

Stosując analogiczne rozumowanie można pokazać, że dla nieparzystego m zachodzą przypadki (a), (b_e) z Twierdzenia 5.7.

Część (II). Pokażemy implikację odwrotną: jeśli żaden z warunków (a), (b_e), (b_o), (c) nie zachodzi, to żaden z przypadków (1) lub (2) Twierdzenia 5.7 nie jest spełniony.

Niech $|D| \geq 2$, wtedy $L(\bar{f}^n) \neq 0$, stąd przypadek (2) Twierdzenia 5.7 nie zachodzi. Teraz zauważmy, że z Lematu 5.10 wszystkie współczynniki rozwinięcia okresowego ciągu $(L(\bar{f}^n))_{n=1}^{\infty}$ są niezerowe.

Założmy, że m jest nieparzyste oraz $\sum_{i=1}^k \alpha_i > \frac{m-3}{2}$. Zbadamy, kiedy para ciągów

$$(\text{reg}_1(n), (1-D)\text{reg}_1(n) + \sum_{k \in \text{Div}(r) \setminus \{1\}} b_k \text{reg}_k(n))_{n|r}$$

może być $\partial DD^m(1|r)$ parą ciągów (przypadek (1) Twierdzenia 5.7).

Może się to stać wyłącznie w przypadku, gdy $\sum_{i=1}^k \alpha_i = \frac{m-1}{2}$ (Lemat 5.3) oraz dla $D = 2$ (za pomocą pary ciągów typu (β)), co daje warunek (c), który nie zachodzi ze względu na założenie $\sum_{i=1}^k \alpha_i > \frac{m-3}{2}$.

Jeśli m jest parzyste oraz $\sum_{i=1}^k \alpha_i > \frac{m-2}{2}$, to z tego samego powodu para ciągów

$$(\text{reg}_1(n), (1+D)\text{reg}_1(n) + \sum_{k \in \text{Div}(r) \setminus \{1\}} b_k \text{reg}_k(n))_{n|r}$$

może być $\partial DD^m(1|r)$ parą ciągów wyłącznie dla $\sum_{i=1}^k \alpha_i \leq \frac{m}{2}$ (para ciągów typu (F^e) z Twierdzenia 5.6), ale jedynie w przypadku, gdy $b_1 = 1 + D \in \{0, 1\}$, co przeczy temu, że $|D| \geq 2$. \square

5.4 Kombinatoryczny schemat obliczania

$D_r(f; M, \partial M)$

Będziemy poszukiwać wzoru na $D_r(f; M, \partial M)$ mod reg_1 . Przypomnijmy, że r jest liczbą nieparzystą.

Definicja 5.12. Dla skończonych podzbiorów $A, B \subset \mathbb{N}$ oraz liczb naturalnych (całkowitych dodatnich) a, b definiujemy $H(A, B; a, b)$ jako minimalną sumę $\alpha + \beta$ spełniającą następujące własności: istnieją podzbiory $A_1, \dots, A_\alpha; B_1, \dots, B_\beta \subset \mathbb{N}$ takie, że

1. $\#A_i \leq a, \#B_j \leq b,$
2. $B \subset \bigcup_{j=1}^{\beta} \overline{B_j}; \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{\alpha} \overline{A_i} \cup \bigcup_{j=1}^{\beta} \overline{B_j}.$

Ponownie, każdą taką rodzinę zbiorów $\{A_1, \dots, A_\alpha; B_1, \dots, B_\beta\}$ spełniającą $\alpha + \beta = H(A, B; a, b)$ będziemy nazywać minimalnym rozkładem pary zbiorów (A, B) .

Za pomocą liczby $H(B; l)$ możemy wyrazić minimalną liczbę punktów okresowych w gładkiej klasie homotopii funkcji zdefiniowanych na rozmaitościach bez brzegu. Nietrudno zauważyć, że zachodzi następujący fakt:

Lemat 5.13. Niech a, b będą liczbami naturalnymi, wtedy

$$H(A, B; a, b) = \min_{\mathcal{B}^q} \left\{ \beta(q) + H\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\beta(q)} \overline{B_j^q}; a\right) \right\}, \quad (5.5)$$

gdzie $\mathcal{B}^q = \{B_1^q, \dots, B_{\beta(q)}^q\}$ oznacza dowolny rozkład zbioru B tzn. rodzinę (niekoniecznie minimalną) spełniającą warunki (1) i (2) Definicji 4.7.

Dowód. Z Definicji 5.14 szukamy najmniejszej sumy $\alpha + \beta$, dla której istnieją podzbiory $A_1, \dots, A_\alpha; B_1, \dots, B_\beta \subset \mathbb{N}$ spełniające warunki (1) i (2). Zauważmy, że warunek (2) możemy zapisać równoważnie jako

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{\beta} \overline{B_j}; \quad A \setminus \bigcup_{j=1}^{\beta} \overline{B_j} \subset \bigcup_{i=1}^{\alpha} \overline{A_i}. \quad (5.6)$$

Weźmy dowolną rodzinę $\mathcal{B}^q = \{B_1^q, \dots, B_{\beta(q)}^q\}$ spełniającą warunek (1) oraz $\bigcup_{j=1}^{\beta} \overline{B_j}$. Wtedy $\beta(q)$ zostaje już ustalone przez rodzinę \mathcal{B}^q i pozostaje do znalezienia minimalna ilość zbiorów A_i potrzebna, do zrealizowania drugiej części warunku 5.6. Innymi słowy, pozostaje do znalezienia minimalny rozkład zbioru $A \setminus \bigcup_{j=1}^{\beta} \overline{B_j}$. W ten sposób znaleźliśmy pewne $\alpha + \beta$. Aby znaleźć najmniejsze $\alpha + \beta$, należy prześledzić tę konstrukcję po wszystkich możliwych rodzinach \mathcal{B}^q , a więc

$$H(A, B; a, b) = \min_{\mathcal{B}^q} \left\{ \beta(q) + H\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\beta(q)} \overline{B_j^q}; a\right) \right\}.$$

□

W poprzednim rozdziale zajęliśmy się badaniem wartości $D_r^m[f]$ mod $\text{reg}_{1,2} = H(B; l)$. Od teraz naszym celem jest ustalenie wartości $D_r(f; M, \partial M)$ mod reg_1 .

Twierdzenie 5.14. Niech M będzie gładką zwartą i jednospójną rozmaitością z jednospójnym brzegiem ∂M , r będzie nieparzystą liczbą naturalną, $(f, \bar{f}): (M, \partial M) \rightarrow (M, \partial M)$ będzie funkcją par klasy C^1 oraz $\dim M = 2l + 1$ albo $\dim M = 2l + 2$. Wprowadzamy następującą notację:

$$A = \{k : 1 \neq k|r, a_k \neq 0\}, B = \{k : 1 \neq k|r, b_k \neq 0\}, \text{ gdzie} \quad (5.7)$$

$$L(f^n) = \sum_k a_k \text{reg}_k(n), L(\bar{f}^n) = \sum_k b_k \text{reg}_k(n) \text{ dla } n|r.$$

Wtedy

$$D_r(f; M, \partial M) \text{ mod reg}_1 = \begin{cases} H(A, B; l, l) & \text{jeśli } \dim M = 2l + 1, \\ H(A, B; l + 1, l) & \text{jeśli } \dim M = 2l + 2. \end{cases} \quad (5.8)$$

Dowód. Rozpocznijmy od rozważenia przypadku $\dim M = 2l + 1$. Z Definicji 4.2 będziemy szukać minimalnego rozkładu liczb Lefschetza zgodnie ze wzorami (5.1) oraz (5.2).

Zauważmy, że brzeg ∂M rozmaitości M jest domkniętą rozmaitością wymiaru $2l$. Minimalizując liczbę punktów okresowych dla funkcji par (f, \bar{f}) , najpierw weźmy pod uwagę $\bar{f}: \partial M \rightarrow \partial M$.

Stosując (5.2) reprezentujemy $L(\bar{f}^n)$ w postaci

$$L(\bar{f}^n) = \sum_i \bar{c}_i(n), \quad (5.9)$$

dla $n|r$, gdzie każdy ciąg $\{\bar{c}_i(n)\}_{n|r}$ jest $DD^{2l}(1|r)$ ciągiem.

Wymiar rozmaitości ∂M jest parzysty (równy $2l$) oraz (na tą chwilę) będziemy ignorować współczynnik b_1 . Zatem jedyne ciągi $\{c_i(n)\}_{n|r}$, które mogą wystąpić w rozkładzie (5.9) są ciągami typu (F^e) występującymi w Twierdzeniu 4.6 (dla $n|r$), przy czym część ze współczynników g_k występujących w rozwinięciu okresowym może być równe zero:

$$\bar{c}_i(n) = \sum_{k \in L(l)} g_k \text{reg}_k(n).$$

Z tego wynika, że każdy $DD^{2l}(1|r)$ ciąg $\{\bar{c}_i(n)\}_{n|r}$ odpowiada zbiorowi B_i składającemu się z co najwyżej l nietrywialnych dzielników r , stąd

$$\bar{c}_i(n) = \sum_{k \in \bar{B}_i} g_k \text{reg}_k(n). \quad (5.10)$$

Z (5.9) wiemy, że $DD^{2l}(1|r)$ ciągi $\{\bar{c}_i(n)\}_{n|r}$ realizują wszystkie współczynniki $b_k \text{reg}_k$ dla $k|r$, $k \neq 1$, $k \in B$. Otrzymujemy, że realizacja $\{L(\bar{f}^n)\}_{n|r}$ jest równoważna znalezieniu rozkładu B (niekoniecznie minimalnego) $\mathcal{B}^q = \{B_1, \dots, B_{\beta(q)}\}$.

Rozważmy teraz realizację $\{L(f^n)\}_{n=1}^\infty$:

$$L(f^n) = \sum_{j=1}^{\alpha} d_j(n) + \sum_{i=1}^{\beta} c_i(n) \quad (5.11)$$

dla $n|r$, gdzie każdy d_j jest $DD^{2l+1}(1|r)$ ciągiem oraz każda para $(c_i(n), \bar{c}_i(n))_{r|n}$ jest $\partial DD^{2l}(1|r)$ parą ciągów. Z części (II) Twierdzenia 5.6 ciąg $\{c_i(n)\}_{n|r}$ w każdej z par ciągów ma dokładnie taką samą postać jak $\{\bar{c}_i(n)\}_{n|r}$, tzn. jest dany przez (5.10).

Stosując $\beta(q)$ $\{c_i(n)\}_{n|r}$ ciągi, otrzymujemy realizację ciągów bazowych reg_k dla $k \in \bigcup_{i=1}^{\beta(q)} \overline{B}_i$. Pozostałe elementy zbioru A muszą zostać zrealizowane poprzez $DD^{2l+1}(1|r)$ ciągi $\{d_j(n)\}_{n|r}$:

$$L(f^n) - \sum_{i=1}^{\beta(q)} c_i(n) = \sum_{j=1}^{\alpha(q)} d_j(n). \quad (5.12)$$

Zauważmy, że liczba $\alpha(q)$ zależy od postaci rodziny \mathcal{B}^q , ponieważ $\bigcup_{i=1}^{\beta(q)} \overline{B}_i$ może zawierać pewne elementy ze zbioru A .

Jeśli $\dim M = 2l + 1$ jest nieparzyste, to z części (I) Twierdzenia 4.6, każdy ciąg $\{d_j(n)\}_{n|r}$ jest postaci (B^o) , (C^o) lub (D^o) , tzn.

$$d_j(n) = \sum_{k \in L(\frac{2l+1-1}{2})} a_k \text{reg}_k(n). \quad (5.13)$$

Z możliwych postaci $\{d_j(n)\}_{n|r}$, czyli faktu, że $k \in L(l)$ wynika, że wybrana rodzina $\mathcal{B}^q = \{B_1^q, \dots, B_\beta^q\}$ spełnia (1) i (2) Definicji (4.7), stąd

$$D_r(f; M, \partial M) \text{ mod } \text{reg}_1 = \min_{\mathcal{B}^q} \{\beta(q) + H(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\beta(q)} \overline{B}_j^q; l)\}, \quad (5.14)$$

co dowodzi twierdzenia dla przypadku $\dim M = 2l + 1$.

W przypadku $\dim M = 2l + 2$ stosujemy to samo rozumowanie, z następującymi różnicami, które wynikają z różnicy wymiaru.

- We wzorze (5.9) rozważamy $DD^{2l+1}(1|r)$ ciągi par $\{c_i(n)\}_{n|r}$.
- Rozważając $\partial DD^{2l+1}(1|r)$ pary ciągów $(c_i(n), \bar{c}_i(n))_{n|r}$ zauważamy, że z Twierdzenia 5.6 (I) ciągi $\{c_i(n)\}_{n|r}$ w każdej takiej parze mają dokładnie taką samą postać jak $\{\bar{c}_i(n)\}_{n|r}$.
- We wzorze (5.12) używamy $DD^{2l+2}(1|r)$ ciągów $\{d_j(n)\}_{n|r}$, co z Twierdzenia 4.6 (II) implikuje, że w (5.13) rozważamy ciągi bazowe reg_k z k należącymi do zbiorów postaci $L(\frac{2l+2}{2}) = L(l+1)$. Finalnie z Lematu 5.13 dla $H(A, B; l+1, l)$ zachodzi

$$D_r(f; M, \partial M) \text{ mod } \text{reg}_1 = \min_{\mathcal{B}^q} \{\beta(q) + H(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\beta(q)} \overline{B}_j^q; l+1)\}, \quad (5.15)$$

co uzupełnia dowód dla przypadku $\dim M = 2l + 2$.

□

Zauważmy, że stosując notację okresów algebraicznych w Twierdzeniu 5.14 mamy

$$A = AP_r(f) \setminus \{1\} \text{ oraz } B = AP_r(\bar{f}) \setminus \{1\}.$$

Następujący wniosek jest natychmiastową konsekwencją wzorów (5.14) oraz (5.15).

Wniosek 5.15. Załóżmy, że r jest liczbą nieparzystą. Dla $\dim M = 2l + 1$:

$$D_r(f; M, \partial M) \bmod \text{reg}_1 \leq H(B; l) + H(A \setminus B; l). \quad (5.16)$$

Dla $\dim M = 2l + 2$:

$$D_r(f; M, \partial M) \bmod \text{reg}_1 \leq H(B; l) + H(A \setminus B; l + 1). \quad (5.17)$$

W kolejnym twierdzeniu określimy dokładną wartość niezmiennika $D_r(f; M, \partial M)$ odrzucając tym samym założenie $\bmod \text{reg}_1$.

Twierdzenie 5.16. Niech M będzie gładką, zwartą i jednorodną rozmaitością z jednorodnym brzegiem wymiaru m , $f: (M, \partial M) \rightarrow (M, \partial M)$. Niech $A_1, \dots, A_\alpha, B_1, \dots, B_\beta$ będzie minimalnym rozkładem pary zbiorów A i B (por. wzór 5.7) określającym wartość $D_r(f; M, \partial M)$ we wzorze (5.8). Jeśli $m = 2l + 1$ jest liczbą nieparzystą, wtedy

$$D_r(f; M, \partial M) = \begin{cases} H(A, B; l, l) & \text{jeśli } |L(\bar{f})| \leq \beta \\ & \text{lub } \#B_i < \frac{m-1}{2} \text{ dla pewnego } i, \\ H(A, B; l, l) + 1 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Jeśli $m = 2l + 2$ jest liczbą parzystą, wtedy

$$D_r(f; M, \partial M) = \begin{cases} H(A, B; l + 1, l) & \text{jeśli } 0 \leq L(\bar{f}) \leq \beta \text{ oraz} \\ & (L(f) = \alpha + \beta \text{ albo } \#A_i < \frac{m}{2} \text{ dla pewnego } i), \\ & \text{lub } \#B_i < \frac{m}{2} \text{ dla pewnego } i, \\ H(A, B; l + 1, l) + 1 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Dowód. Rozważmy przypadek $m = 2l + 1$. Jeśli dla pewnego i zachodzi $\#B_i < \frac{m-1}{2}$, to B_i możemy utożsamić z ciągiem typu (A^o) z dowolnym współczynnikiem przy reg_1 w rozwinięciu okresowym $\{L(\bar{f}^n)\}_{n|r}$.

Założmy teraz, że $\#B_i = \frac{m-1}{2}$ dla każdego i . Musimy użyć β ciągów typu (B^o) , (C^o) lub (D^o) , dla których współczynniki przy reg_1 należą do zbioru $\{-1, 0, 1\}$. Możemy więc zrealizować $\{L(\bar{f}^n)\}_{n|r}$ jako sumę dokładnie β takich ciągów wtedy i tylko wtedy, gdy współczynnik $b_1 = L(\bar{f})$ jest liczbą całkowitą należącą do przedziału $[-\beta, \beta]$.

W pozostałych możemy użyć ciągu typu (A^o) , który posiada dowolne współczynniki przy reg_1 , a więc kompensuje on współczynnik b_1 .

Dla przypadku m parzystego, dowód jest analogiczny. □

5.5 Minimalna liczba punktów okresowych realizowana na brzegu

Interesującym problemem jest znalezienie warunków pozwalających na zredukowanie obliczeń niezmiennika $D_r(f; M, \partial M)$ do obliczeń na brzegu tj.:

$$D_r(f; M, \partial M) \bmod \text{reg}_1 = D_r^m[\bar{f}] \bmod \text{reg}_1 = H(B; l). \quad (5.18)$$

Bezpośrednio ze wzorów (5.14) oraz (5.15) otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 5.17. Załóżmy, że $A \subset B$, gdzie A i B są zdefiniowane tak jak w Twierdzeniu 5.14 za pomocą wzoru (5.7), wtedy

$$D_r(f; M, \partial M) \bmod \text{reg}_1 = H(B; l). \quad (5.19)$$

Z powyższego wniosku możemy wydedukować w pewnych przypadkach informację na temat minimalnej liczby punktów okresowych niezależnie od zachowania funkcji we wnętrzu rozmaitości. Równość (5.18) zachodzi w szczególności dla $B = \mathbb{N}$, co często występuje dla funkcji z szybko rosnącymi liczbami Lefschetza iteracji por. [26, 29].

Przykład 5.18. Niech N będzie gładką, jednopójną domkniętą rozmaitością wymiaru 4. Rozważmy rozmaitość $M = N \setminus \mathbb{B}^4$, gdzie \mathbb{B}^4 oznacza 4-wymiarową kulę otwartą.

Niech r będzie nieparzystą liczbą naturalną oraz $(f, \bar{f}): (M, \partial M) \rightarrow (M, \partial M)$ będzie funkcją par klasy C^1 . Brzeg ∂M rozmaitości M jest równy S^3 . Rozważmy klasę homotopii G dla funkcji $\bar{f}: S^3 \rightarrow S^3$ posiadającej stopień topologiczny $D = \text{deg}(\bar{f})$ co do modułu większy od 1.

Z Lematu 5.10 wiemy, że dla $|D| > 1$ współczynniki b_i rozwinięcia okresowego ciągu liczb Lefschetza $\{L(f^n)\}_{n=1}^{\infty}$ są niezerowe, więc $B = \mathbb{N}$. Z tego wynika, że dowolne zachowanie funkcji f we wnętrzu rozmaitości M generuje zbiór $A \subset \mathbb{N} = B$. Z Wniosku 5.17 otrzymujemy $D_r(f; M, \partial M) \bmod \text{reg}_1 = D_r^4[\bar{f}] \bmod \text{reg}_1$. Z drugiej strony w [29] zostało udowodnione, że $D_r^4[\bar{f}] \bmod \text{reg}_1 = \zeta(r) - 1$, gdzie $\zeta(r)$ oznacza liczbę dzielników r , co daje dokładną wartość $D_r(f; M, \partial M) \bmod \text{reg}_1$ dla wszystkich funkcji w klasie homotopii G .

Rozważmy teraz bardziej skomplikowany przypadek. Będziemy używać notacji z (5.7), sformułowanej w Twierdzeniu 5.14. Niech następujące założenia będą spełnione:

Założenia 5.5.1.

- Niech r będzie iloczynem różnych liczb pierwszych tzn. $r = p_1 p_2 \dots p_u p_{u+1} \dots p_{u+w}$.
- $A \subset \text{Div}(r) \setminus \{1\}$.
- $B = \text{Div}(p_1 p_2 \dots p_u) \setminus \{1\}$.
- $u = sl + R$, gdzie s, l są liczbami naturalnymi, l jest ustaloną liczbą spełniającą $1 \leq R \leq l$.

Wprowadźmy najpierw abstrakcyjną rodzinę \mathcal{B} podzbiorów zbioru B zdefiniowanego w sposób indukcyjny.

Definicja 5.19. Niech l i u będą ustalonymi liczbami naturalnymi z rozkładem $u = sl + R$, gdzie s jest nieujemną liczbą całkowitą oraz $1 \leq R \leq l$. Dla $B = \text{Div}(p_1 p_2 \dots p_u) \setminus \{1\}$ definiujemy rekurencyjnie rodzinę \mathcal{B} podzbiorów B .

(1) Jeśli $u \leq l$, to $\mathcal{B} = \{\{p_1, \dots, p_u\}\} = \{B_1\}$.

(2) Niech $u = sl + R$ oraz $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_h\}$, gdzie $1 \leq R \leq l$ oraz $h \in \mathbb{N}$, $B_h = \{p_{sl+1}, \dots, p_{sl+R}\}$.

Dla $u = sl + R + 1$ rodzinę \mathcal{B} definiujemy w następujący sposób:

- a) jeśli $1 \leq R < l$, to $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_{h-1}, B'_1, \dots, B'_{h-1}, \tilde{B}\}$, gdzie $B'_i = p_{sl+R+1} \cdot B_i$ oraz $\tilde{B} = \{p_{sl+1}, \dots, p_{sl+R+1}\}$,
- b) jeśli $R = l$, to $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_h, B'_1, \dots, B'_h, \tilde{B}\}$, gdzie $B'_i = p_{sl+R+1} \cdot B_i$ oraz $\tilde{B} = \{p_{sl+R+1}\}$.

Konstrukcja takiej rodziny \mathcal{B} była rozważana w [32] (w stosunku do $D_r^m[f]$), gdzie zostało udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.20 ([32]). *Rodzina \mathcal{B} opisana w Definicji 5.19 spełnia warunki minimalnego rozkładu zbioru B dla dowolnej liczby naturalnej l .*

Stosując Twierdzenie 5.20, sformułujemy warunek wystarczający do minimalizacji jedynie w odniesieniu do punktów na brzegu (1) oraz podamy dokładny wzór na wartość niezmiennika zachodzący przy dodatkowych warunkach (2).

Twierdzenie 5.21. *Niech M będzie gładką, zwartą i jednospójną rozmaitością wymiaru $m \geq 4$ ($m = 2l + 1$ albo $m = 2l + 2$) z jednospójnym brzegiem oraz $(f, \bar{f}): (M, \partial M) \rightarrow (M, \partial M)$. Załóżmy, że spełnione są Założenia 5.5.1, wtedy*

(1) jeśli $A \subset B \cup \overline{\{p_{sl+1}, \dots, p_{sl+R}, a_1, \dots, a_{l-R}\}}$ dla $a_i \in \text{Div}(r) \setminus \{1\}$, to

$$D_r(f; M, \partial M) \bmod \text{reg}_1 = D_r^m[f] \bmod \text{reg}_1 = H(B; l);$$

(2) jeśli, $m = 2l + 1$ oraz $l|u$ i $l|w$ oraz $A = \text{Div}(r) \setminus \{1\}$, wtedy

$$D_r(f; M, \partial M) \bmod \text{reg}_1 = \frac{2^{u+w} - 1}{2^l - 1}. \quad (5.20)$$

Dowód. (1) Z Twierdzenia 5.20, rodzina $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_h\}$ przedstawiona w Definicji 5.19 zadaje minimalny rozkład dla $B = \text{Div}(p_1 p_2 \dots p_u) \setminus \{1\}$. Zauważmy, że $\#B_i = l$ dla $i < h$ oraz $\#B_h = R$. Z Definicji 4.7 niezmiennika $H(B; l)$, moc każdego ze zbiorów B_i musi być mniejsza lub równa l . Możemy więc uzupełnić zbiór B_h poprzez dodanie kolejnych dzielników r . Oczywiście możemy dodać co najwyżej $l - R$ dzielników r , otrzymując $B'_h = \{p_{sl+1}, \dots, p_{sl+R}, a_1, \dots, a_{l-R}\}$ dla $a_i \in \text{Div}(r) \setminus \{1\}$. Finalnie zauważmy, że rodzina $\{B_1, \dots, B_{h-1}, B'_h\}$ jest minimalnym rozkładem zbioru B jak i pary zbiorów (A, B) .

(2) Przypomnijmy, że w drugim punkcie rozważamy rozmaitości wymiaru nieparzystego tj. $\dim M = 2l + 1$. Rozpocznijmy od udowodnienia następującej nierówności:

$$D_r(f; M, \partial M) \bmod \text{reg}_1 = H(A, B; l, l) \leq \frac{2^{u+w} - 1}{2^l - 1}. \quad (5.21)$$

Z (5.16) mamy, że $H(A, B; l, l) \leq H(B; l) + H(A \setminus B; l)$, określmy więc wartość $H(B; l)$ oraz $H(A \setminus B; l)$.

Dla zbiorów liczb całkowitych X i Y oznaczymy przez $X \cdot Y$ zbiór $\{xy : x \in X, y \in Y\}$. Stosując równość $A = B \cup (A \setminus B)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \text{Div}(r) \setminus \{1\} &= \left[\text{Div}(p_1 p_2 \dots p_u) \setminus \{1\} \right] \cup \\ &\cup \left[\left(\text{Div}(p_{u+1} p_2 \dots p_{u+w}) \setminus \{1\} \right) \cdot \text{Div}(p_1 p_2 \dots p_u) \right]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Zauważmy, że w przypadku, gdy $l|u$, dowolny minimalny rozkład $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_h\}$ przedstawiony w Definicji 5.19 składa się ze zbiorów B_i takich, że

- dla każdego, i $|B_i| = l$ oraz $B_i \subset B$,
- każdy B_i zawiera liczby relatywnie pierwsze pomnożone przez tą samą liczbę naturalną, co implikuje $|\overline{B_i}| = 2^{lB_i} - 1 = 2^l - 1$,
- $\overline{B_i} \cap \overline{B_j} = \emptyset$ dla $i \neq j$.

Z powyższych własności otrzymujemy

$$2^u - 1 = |B| = |\overline{B_1} \cup \dots \cup \overline{B_h}| = \sum_{i=1}^h |\overline{B_i}| = h(2^l - 1), \quad (5.23)$$

a więc finalnie

$$H(B; l) = h = \frac{2^u - 1}{2^l - 1}.$$

Zauważmy, że w przypadku, gdy $l|w$ dowolny minimalny rozkład $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ zbioru $C = \text{Div}(p_{u+1}p_{u+2} \dots p_{u+w}) \setminus \{1\}$ składa się ze zbiorów C_i o tych samych własnościach, co zbiory B_i . W konsekwencji

$$H(C; l) = k = \frac{2^w - 1}{2^l - 1}.$$

Zdefiniujmy $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_o\}$ jako rodzinę składającą się z iloczynów każdego ze zbiorów \mathcal{C} z każdym dzielnikiem ze zbioru $\text{Div}(p_1 p_2 \dots p_u)$. Stosując ten sam argument, co dla rodziny \mathcal{B} , otrzymujemy, że \mathcal{A} jest minimalnym rozkładem $A \setminus B$, zatem

$$H(A \setminus B; l) = o = 2^u \cdot \frac{2^w - 1}{2^l - 1}.$$

Ostatecznie ze wzoru (5.17) otrzymujemy nierówność:

$$H(A, B; l, l) \leq H(B; l) + H(A \setminus B; l) = \frac{2^u - 1}{2^l - 1} + 2^u \cdot \frac{2^w - 1}{2^l - 1} = \frac{2^{u+w} - 1}{2^l - 1}.$$

Z drugiej strony

$$\frac{2^{u+w} - 1}{2^l - 1} = \frac{|A \cup B|}{2^l - 1} \leq H(A, B; l, l),$$

co daje równość $H(A, B; l, l) = \frac{2^{u+w} - 1}{2^l - 1}$.

□

Spis rysunków

1.1	Działanie funkcji f , dla której $\deg(f) = 2$	18
3.1	Wizualizacja definicji punktu niebłądzącego.	30
3.2	Przestrzeń M_g z oznaczonymi generatorami pierścienia kohomologii α_i oraz β_i	41

Spis tabel

3.1	Porównanie reprezentacji minimalnego zbioru okresów Lefschetza $MPer_L(f)$	37
3.2	Zbiór $MPer_L[N_4]$ wszystkich możliwych minimalnych zbiorów okresów Lefschetza dla dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a przestrzeni N_4	49
3.3	Wybrane obliczenia rodziny $MPer_L[N_g]$ minimalnych zbiorów okresów Lefschetza dla dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a zdefiniowanych na N_g	50
4.1	Wartości $D_r^4[f]$ mod $\text{reg}_{1,2}$ dla $M = \{a_i : r = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}\}$	73

Bibliografía

- [1] I. K. Babenko and S. A. Bogatyĭ. The behavior of the index of periodic points under iterations of a mapping. *Math. USSR Izv.*, 38, 1992.
- [2] D. Baralić. On integers occurring as the mapping degree between quasitoric 4-manifolds. *J. Aust. Math. Soc.*, 103(3):289–312, 2017.
- [3] H. Barge and K. Wójcik. Mayer-Vietoris property of the fixed point index. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 40(2):643–667, 2017.
- [4] P Berrizbeitia, M.J. Gonzalez, A. Mendoza, and V.F. Sirvent. On the Lefschetz zeta function for quasi-unipotent maps on the n -dimensional torus. II: The general case. *Topology Appl.*, 210:246–262, 2016.
- [5] P. Berrizbeitia, M.J. González, and V.F. Sirvent. On the Lefschetz zeta function and the minimal sets of Lefschetz periods for Morse-Smale diffeomorphisms on products of l -spheres. *Topology Appl.*, 235:428—444, 2018.
- [6] P. Berrizbeitia and V.F. Sirvent. On the Lefschetz zeta function for quasi-unipotent maps on the n -dimensional torus. *J.Differ. Equ. Appl.*, 20:961–972, 2014.
- [7] L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz, and L. S. Young. Periodic points and topological entropy of one-dimensional maps. *Lectures Notes in Math.*, 819:18–24, 1983.
- [8] L. Brouwer. Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Classen von eindeutigen stetigen Transformationen der Ringfldchen. *Mathematische Annalen*, 1921.
- [9] R. F. Brown and R. E. Greene. An Interior Fixed Point Property of the Disc. *The American Mathematical Monthly*, 101, 1994.
- [10] R. F. Brown, R. E. Greene, and H. Schirmer. Fixed points of map extensions. *Topological Fixed Point Theory and Applications. Lecture Notes in Mathematics*, 1411, 1989.
- [11] K. Chandrasekharan. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, Berlin, 1968.
- [12] S. N. Chow, J. Mallet-Parret, and J. A. Yorke. A periodic point index which is a bifurcation invariant. *Geometric dynamics*, 50, 1981.

- [13] C Cufí-Cabré and Llibre J. Periods of Morse-Smale diffeomorphisms on \mathbb{S}^n , $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ and $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$. *arXiv:2004.01465*, 2021.
- [14] A. Dold. Fixed point indices of iterated maps. *Inventiones Math.*, 74:419–435, 1985.
- [15] S. Donaldson. An application of gauge theory to four-dimensional topology. *J. Differential Geom.*, 18(2):279–315, 1983.
- [16] B.-S. Du, S.-S. Huang, and M.-C Li. Newton, Fermat, and exactly realizable sequences. *J. Integer Seq.*, 9, 2005.
- [17] H. Duan and SC. Wang. The Degrees of Maps Between Manifolds. *Math. Z.*, 244:67–89, 2003.
- [18] R. Duda. *Wprowadzenie do topologii część 2*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1986.
- [19] D. S. Dummit and R. M. Foote. *Abstract Algebra*, volume 3. N.J.: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- [20] L.S. Efremova. Periodic orbits and the degree of a continuous map of a circle. *Differential and Integral Equations (Gorkii)*, 2:109–115, 1978.
- [21] J. Franks. *Homology and dynamical systems*, volume 49. Providence, R.I., CBMS Regional Conf. Ser. in Math., 1982.
- [22] M. H. Freedman. The topology of 4-manifolds. *J. Diff. Geom.*, 17:337–453, 1982.
- [23] G. Graff. Existence of δ_m -periodic points for smooth maps of compact manifold. *Hokkaido Math. J.*, 29(1):11–21, 2000.
- [24] G. Graff. Minimal periods of maps of rational exterior spaces. *Fund. Math.*, 163(2):99–115, 2000.
- [25] G. Graff. Algebraic periods of self-maps of a rational exterior space of rank 2. *Fixed Point Theory Appl.*, 2:1–9, 2006.
- [26] G. Graff. Minimal number of periodic points for smooth self-maps of two-holed 3 dimensional closed ball. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 33(1):121–130, 2009.
- [27] G. Graff, J. Byszewski, and T. Ward. Dold sequences, periodic points, and dynamics. *Bull. London Math. Soc.*, 53:1263–1298, 2021.
- [28] G. Graff and J. Jezierski. Minimal number of periodic points for C^1 self-maps of compact simply-connected manifolds. *Forum Math.*, 21(3):491–509, 2009.
- [29] G. Graff and J. Jezierski. Minimal number of periodic points for smooth self-maps of S^3 . *Fund. Math.*, 204(3):127–144, 2009.
- [30] G. Graff and J. Jezierski. Minimization of the number of periodic points for smooth self-maps of closed simply-connected 4-manifolds. *Discrete Contin. Dyn. Syst. 2011, Dynamical systems, differential equations and applications. 8th AIMS Conference. Suppl.*, 1:523–532, 2011.

- [31] G. Graff and J. Jezierski. Minimizing the number of periodic points for smooth maps. Non-simply connected case. *Topology Appl.*, 158(3):276–290, 2011.
- [32] G. Graff and J. Jezierski. Combinatorial scheme of finding minimal number of periodic points for smooth self-maps of simply connected manifolds. *J. Fixed Point Theory Appl.*, 13(1):63–84, 2012.
- [33] G. Graff and J. Jezierski. Minimal number of periodic points of smooth boundary-preserving self-maps of simply-connected manifolds. *Geom. Dedicata*, 187:241–258, 2017.
- [34] G. Graff and J. Jezierski. Minimal number of periodic points of smooth boundary-preserving self-maps of simply-connected manifolds. *Geom. Dedicata*, 187:241–258, 2017.
- [35] G. Graff, J. Jezierski, and A. Myszkowski. Computations of the least number of periodic points of smooth boundary-preserving self-maps of simply-connected manifolds. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 56(2):589–606, 2020.
- [36] G. Graff, J. Jezierski, and P. Nowak-Przygodzki. Fixed point indices of iterated smooth maps in arbitrary dimension. *J. Differential Equations*, 251:1526–1548, 2011.
- [37] G. Graff and A. Kaczkowska. Minimization of the number of periodic points for smooth self-maps of simply-connected manifolds with periodic sequence of lefschetz numbers. *Cent. Eur. J. Math.*, 10(iss. 6):2160–2172, 2012.
- [38] G. Graff and A. Kaczkowska. Reducing the number of periodic points in the smooth homotopy class of a self-map of a simply-connected manifold with periodic sequence of Lefschetz numbers. *Ann. Polon. Math.*, 107(1):29–48, 2013.
- [39] G. Graff, M. Lebiedź, and A. Myszkowski. Periodic expansion in determining minimal sets of Lefschetz periods for Morse–Smale diffeomorphisms. *J. Fixed Point Theory Appl.*, 21(47):99–115, 2019.
- [40] G. Graff, M. Lebiedź, and P. Nowak-Przygodzki. Generating sequences of Lefschetz numbers of iterates. *Monatsh Math.*, 188:511–525, 2019.
- [41] G. Graff and A. Myszkowski. Database of the minimal sets of Lefschetz periods for Morse-Smale diffeomorphisms of a connected sum of g real projective planes. *Bridge of Data*, 2019.
- [42] G. Graff and A. Myszkowski. Database of the minimal sets of Lefschetz periods for Morse-Smale diffeomorphisms of a connected sum of g tori. *Bridge of Data*, 2020.
- [43] G. Graff and A. Myszkowski. Minimal number of periodic points for smooth self-maps of simply-connected manifolds. *Bridge of Data*, 2020.
- [44] G. Graff and A. Myszkowski. Minimal number of periodic points with the periods less or equal to r in the smooth homotopy class of simply-connected manifolds of dimension 4 and homology groups with the sum of ranks less or equal to 10. *Bridge of Data*, 2020.

- [45] G. Graff and A. Myszkowski. Minimal number of periodic points with the periods less or equal to r in the smooth homotopy class of simply-connected manifolds of dimension 5 and homology groups with the sum of ranks less or equal to 10. *Bridge of Data*, 2020.
- [46] G. Graff and A. Myszkowski. Minimal number of periodic points with the periods less or equal to r in the smooth homotopy class of simply-connected manifolds of dimension 6 and homology groups with the sum of ranks less or equal to 10. *Bridge of Data*, 2020.
- [47] G. Graff and A. Myszkowski. Minimal number of periodic points with the periods less or equal to r in the smooth homotopy class of simply-connected manifolds of dimension 7 and homology groups with the sum of ranks less or equal to 10. *Bridge of Data*, 2020.
- [48] G. Graff and A. Myszkowski. Minimal number of periodic points with the periods less or equal to r in the smooth homotopy class of simply-connected manifolds of dimension 8 and homology groups with the sum of ranks less or equal to 10. *Bridge of Data*, 2020.
- [49] G. Graff and A. Myszkowski. The database of odd algebraic periods for quasi-unipotent self-maps of a space having the same homology group as the connected sum of g tori. *Bridge of Data*, 2020.
- [50] G. Graff and A. Myszkowski. Minimal sets of Lefschetz periods for Morse-Smale diffeomorphisms of a connected sum of g real projective planes. *Chapter in: Sharing research data across disciplines*, 2022.
- [51] G. Graff and P. Nowak-Przygodzki. Sequences of fixed point indices of iterations in dimension 2. *Arkiv för Matematik*, 1(5):389 – 408, 1951.
- [52] G. Graff and P. Pilarczyk. An algorithmic approach to estimating the minimal number of periodic points for smooth self-maps of simply-connected manifolds. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 45(1):273–286, 2015.
- [53] A. Guillamon, X. Jarque, J. Llibre, J. Ortega, and Torregrosa J. Periods for transversal maps via Lefschetz numbers for periodic points. *Trans. Am. Math. Soc.*, 347(12):4779–4806, 1995.
- [54] J. L. Guirao and J. Llibre. On the set of periods for the Morse-Smale diffeomorphisms on the disc with n holes. *J. Difference Equ. Appl.*, 19(7):1161–1173, 2013.
- [55] J.L.G. Guirao and J. Llibre. The set of periods for the Morse-Smale diffeomorphisms on \mathbb{T}^2 . *Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis.*, 19, 2007.
- [56] J.L.G. Guirao and J. Llibre. Periods of Morse-Smale diffeomorphisms of \mathbb{S}^2 . *Colloquium Mathematicum*, 110:477–483, 2008.
- [57] J.L.G. Guirao and J. Llibre. Minimal Lefschetz sets of periods for Morse-Smale diffeomorphisms on the n -dimensional torus. *Journal of Difference Equations and Applications*, 16(5-6):689–703, 2010.

- [58] J.L.G. Guirao and J. Llibre. On the set of periods for the Morse–Smale diffeomorphisms on the disc with N holes. *Journal of Difference Equations and Applications*, 19(7):1161–1173, 2013.
- [59] J.L.G. Guirao and J. Llibre. Periodic structure of transversal maps on $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$ and $S^p \times S^q$. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 12(2):417–425, 2013.
- [60] D. Haibao, G. Graff, J. Jezierski, and A. Myszkowski. Minimization of the number of periodic points for smooth self-maps of simply-connected manifolds with periodic sequence of lefschetz numbers. *preprint*.
- [61] B. Iskra and V.F. Sirvent. Cyclotomic polynomials and minimal sets of Lefschetz periods. *Journal of Difference Equations and Applications*, 18(5):763–783, 2012.
- [62] J. Jezierski. Homotopy periodic sets of selfmaps of real projective spaces. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Third Series.*, 11:293–302, 2005.
- [63] J. Jezierski. Wecken’s theorem for periodic points in dimension at least 3. *Topology Appl.*, 153(11):1825–1837, 2006.
- [64] J. Jezierski, J. Kędra, and W. Marzantowicz. Homotopy minimal periods for solvmanifolds maps. *Topology Appl.*, 144(1-3):29–49, 2004.
- [65] J. Jezierski, E. Keppelmann, and W. Marzantowicz. Wecken property for periodic points on the Klein bottle. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 33(1):51–64, 2009.
- [66] J. Jezierski and W. Marzantowicz. Homotopy minimal periods for nilmanifolds maps. *Math. Z.*, 239:381–414, 2002.
- [67] J. Jezierski and W. Marzantowicz. *Homotopy Methods in Topological Fixed and Periodic Point Theory*. Princeton University Press, 2005.
- [68] B. Jiang. Fixed point classes from a in math. pages 163–170, 1981.
- [69] B. Jiang and J. Llibre. Minimal sets of periods for torus maps. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 4(2):301–320, 1998.
- [70] B. J. Jiang. *Lectures on Nielsen Fixed Point Theory*, volume 14. Amer. Math. Soc., Providence, 1983.
- [71] J.H. Jo and J.B. Lee. Nielsen type numbers and homotopy minimal periods for maps on solvmanifolds with Sol_1^4 -geometry. *Fixed Point Theory Appl.*, 175:1–15, 2015.
- [72] J.Y. Kim, S.S. Kim, and X. Zhao. Minimal sets of periods for maps on the Klein bottle. *J. Korean Math. Soc.*, 45(3):883–902, 2008.
- [73] J.B. Lee. Homotopy minimal periods of maps on the Klein bottle. *Commun. Korean Math. Soc.*, 33(3):961–971, 2018.
- [74] J.B. Lee and X. Zhao. Homotopy minimal periods for expanding maps on infranilmanifolds. *J. Math. Soc. Japan*, 59(1):179–184, 2007.

- [75] J.B. Lee and X. Zhao. Nielsen type numbers and homotopy minimal periods for maps on 3-solvmanifolds. *Algebr. Geom. Topol.*, 8(1):563–580, 2008.
- [76] S. Lefschetz. Continuous Transformations of Manifolds. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1923.
- [77] J. Llibre. A note on the set of periods for Klein bottle maps. *Pacific J. Math.*, 157(1):87–93, 2008.
- [78] J. Llibre and W. Marzantowicz. Homotopy minimal periods of holomorphic maps on surfaces. *Functiones et Approximatio*, 40(2):309–326, 2009.
- [79] J. Llibre, J. Paranõs, and J. A. Rodriguez. Periods for transversal maps on compact manifolds with a given homology. *Houston J. Math.*, 24(3):397–407, 1998.
- [80] J. Llibre and V. F. Sirvent. C^1 self-maps on closed manifolds with finitely many periodic points all of them hyperbolic. *Math. Bohem.*, 141(1):83–90, 2016.
- [81] J. Llibre and V.F. Sirvent. Minimal set of periods for Morse-Smale diffeomorphisms on orientable compact surfaces. *Houston J. Math.*, 35(3):835–855, 2009.
- [82] J. Llibre and V.F. Sirvent. Minimal sets of periods for Morse–Smale diffeomorphisms on non-orientable compact surfaces without boundary. *Journal of Difference Equations and Applications*, 19(3):402–417, 2013.
- [83] J. Llibre and Sirvent V. Erratum: Minimal sets of periods for Morse–Smale diffeomorphisms on orientable compact surfaces. *Houston J. Math.*, 36:335–336, 2010.
- [84] J. Llibre and Sirvent V. A survey on minimal sets of Lefschetz periods for Morse-Smale diffeomorphisms. *Publicaciones matemáticas del Uruguay*, 14:155–169, 2013.
- [85] J. Llibre and Sirvent V. C^1 Self-maps on closed manifolds with all their periodic points hyperbolic. *Houston J. Math.*, 41(4):1119–1127, 2015.
- [86] W. Marzantowicz and P. Nowak-Przygodzki. Finding periodic points of a map by use of a k -adic expansion. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 5(3):495–514, 1999.
- [87] Fagella N. and J. Llibre. Periodic points of holomorphic maps via Lefschetz numbers. *Trans. Am. Math. Soc.*, 352(10):4711–4730, 2000.
- [88] J. Nielsen. Ringfladen og Planen. *Matematisk Tidsskrift. B*, 1924.
- [89] J. Palis and S. Smale. Structural stability theorems. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 14:223–231, 1970.
- [90] V. V. Prasolov. *Elements of Homology Theory*. American Mathematical Society, 2007.
- [91] H. Shapiro. An arithmetic function arising from the ϕ function. *Amer. Math. Monthly*, 50:18–30, 1943.

- [92] M. Shub. *Morse–Smale Diffeomorphisms are Unipotent on Homology*. Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971). Academic Press, New York (1973).
- [93] M. Shub and P. Sullivan. A remark on the Lefschetz fixed point formula for differentiable maps. *Topology*, 13:189–191, 1974.
- [94] F. Wecken. Fixpunktklassen. III. Mindestzahlen von Fixpunkten. *Math. Ann.*, 118:544–577, 1942.