Kraków, 06.09.2022

prof. dr hab. Klaudiusz Wójcik
Instytut Matematyki UJ

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

Adriana Myszkowskiego

p. t. **Rozwinięcia okresowe niezmienników topologicznych iteracji w teorii punktów okresowych odwzorowań gładkich.**

Rozprawa doktorska Pana Adriana Myszkowskiego lokuje się w bardzo szerokim nurcie badań dotyczących niezmienników topologicznych iteracji odwzorowań i ich zastosowań w teorii puntków okresowych. Jest ona podzielona na dwa nurty. Pierwszy z nich dotyczy własności minimalnego zbioru okresów Lefschetza $\mathrm{MPer}_L(f)$ dla dyfeomorfizmu Morse'a-Smale'a f zwartej rozmaitości M. Drugi nurt rozprawy poświęcony jest badaniu najmniejszej liczby punktów okresowych w gładkiej klasie homotopii odwzorowań zwartych, jednospójnych rozmaitości bez brzegu lub z jednospójnym brzegiem.

W Rozdziale 1 autor przypomina podstawowe fakty dotyczące teorii indeksu punktu stałego i liczby Lefschetza. Rozdział 2 ma również charakter przygotowawczy i poświęcony jest ciągowi liczb Lefschetza iteracji odwzorowania quasi-unipotentnego (tzn. wartości własne odwzorowania indukowanego w homologiach są pierwiastkami pierwotnymi z jedynki). W skrócie rozważania te można podsumować następująco: jeżeli M jest rozmaitością zwartą i $f : M \to M$ jest odwzorowaniem quasi-unipotentnym, to istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby całkowite $b_1, \ldots, b_N$ takie, że

$$L(f^n) = \sum_{i=1}^{N} b_i \mathrm{reg}_i(n), \quad n \geq 1. \tag{1}$$

Rozdział 3 zawiera nowe rezultaty dotyczące minimalnego zbioru okresów Lefschetza $\mathrm{MPer}_L(f)$ dla dyfeomorfizmu Morse'a-Smale'a

$f : M \to M$ zwartej rozmaitości M. Shub udowodnił, że dyfeomorfizm f jest quasi-unipotentny.

Z klasycznego twierdzenia Franksa wynika, że funkcja zeta Lefschetza zdefiniowana jako

$$Z_f(t) := \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(f^n)}{n} t^n\Big)$$

jest równa

$$Z_f(t) = \prod_{O\in\Sigma} (1 + \Delta(O) t^{p(O)})^{(-1)^{u(O)+1}}, \tag{2}$$

gdzie Σ jest zbiorem wszystkich orbit okresowych dla f, $p(O)$ jest okresem orbity O, $\Delta(O) \in \{-1, 1\}$ jest typem orientacji O i $u(O)$ jest wymiarem jej rozmaitości niestabilnej.

Niech $Z_f(t) \neq 1$. Minimalny zbiór okresów Lefschetza $\mathrm{MPer}_L(f)$ jest zdefiniowany (Definicja 3.10) przez

$$\mathrm{MPer}_L(f) = \bigcap \{r_1, \ldots, r_{\eta(f)}\}, \tag{3}$$

gdzie przecięcie brane jest po wszystkich możliwych przedstawieniach $Z_f(t)$ w postaci

$$Z_f(t) = \prod_{i=1}^{\eta(f)} (1 + \Delta_i t^{r_i})^{m_i}, \tag{4}$$

gdzie $\Delta_i \in \{-1, 1\}$, r_i są dodatnimi liczbami całkowitymi, m_i są niezerowymi liczbami całkowitymi oraz $\eta(f)$ jest liczbą naturalną zależną od f.

Uwaga 1 *Definicja 3.10 jest dla mnie nieco myląca. Na pierwszy rzut oka wygląda na to, że w (3) przecinane są zbiory $\eta(f)$-elementowe, gdzie $\eta(f)$ jest stałą zależną od dyfeomorfizmu f. Ja to rozumiem następująco. Z twierdzenia Franksa funkcja zeta Lefschetza $Z_f(t)$ jest postaci (4). Przedstawienie funkcji zeta w postaci iloczynu wyrażeń postaci $(1 \pm t^p)^{\pm 1}$ nie jest jednoznaczne. W definicji (3) przecinamy więc zbiory okresów p po wszystkich takich przedstawieniach funkcji zeta.*

Dowodzi się (Lemat 3.12), że

$$\mathrm{MPer}_L(f) \subset \mathrm{MPer}_{ms}(f),$$

gdzie $\mathrm{MPer}_{ms}(f)$ jest homotopijnym zbiorem okresów minimalnych dyfeomorfizmu Morse'a-Smale'a f. Ze względu na niejednoznaczność przedstawienia funkcji zeta w postaci (4) niezmiennik $\mathrm{MPer}_L(f)$ jest trudny do obliczenia z definicji. W głównym rezultacie tego rozdziału (Twierdzenie 3.14), autor udowodnił równość

$$\mathrm{MPer}_L(f) = \{i : b_i \neq 0\} \cap (2\mathbb{N} - 1), \tag{5}$$

gdzie $b_i \in \mathbb{Z}$ są dane przez (1). Pozwala ona na algorytmizację obliczanie niezmiennika $\mathrm{MPer}_L(f)$. Autor przedstawił algorytm jego obliczania w przypadku nieorientowalnych powierzchni zamkniętych N_g o genusie g.

Drugą część rozprawy autor rozpoczyna od badania niezmiennika Dolda $D_r^m[f]$ zdefiniowanego przez Graffa i Jezierskiego dla gładkich odwzorowań zwartej, jednospójnej rozmaitości wymiaru $m \geq 4$ w siebie. Niech

$$u(f) = MF_r^{diff}(f) = \min\{\operatorname{card}\operatorname{Fix}(g) : g \simeq_s f\},$$

gdzie $\simeq_s$ oznacza, że g i f są C^1-homotopijne. Niech x będzie punktem stałym odwzorowania gładkiego f, który jest izolowany dla wszystkich iteracji f^k. Chow, Mallet-Paret i Yorke pokazali, że ciąg indeksów $\{\mathrm{ind}(f^k, x)\}$ musi spełniać pewne restrykcyjne warunki. Ciągi liczb całkowitych spełniające je nazywane są $DD^m(1)$ ciągami. Graff i Jezierski pokazali, że w wymiarze $m \geq 4$ liczba u może być zrealizowana przez punkty stałe. Dokładniej, istnieje takie odwzorowanie g gładko homotopijne z f, że

$$\operatorname{card}\operatorname{Fix}(g^r) = u(f), \quad \operatorname{Fix}(g^r) = \operatorname{Fix}(g) = \{x_1, \ldots, x_{u(f)}\}.$$

Wynika stąd, że

$$L(f^k) = L(g^k) = \sum_{i=1}^{u(f)} \mathrm{ind}(g^k, x_i).$$

W szczególności, (skończony) ciąg $\{L(f^k)\}_{k|r}$ jest sumą $u(f)$ ciągów $DD^m(1)$. Graff i Jezierski pokazali, że jeżeli ciąg $\{L(f^k)\}_{k|r}$ jest sumą u ciągów $DD^m(1)$, to f jest gładko homotopijne z takim odwzorowaniem g, że $\operatorname{card}\operatorname{Fix}(g^r) = u$. Niezmiennik $D_r^m[f]$ jest zdefiniowany jako minimalna liczba składników w możliwych przedstawieniach $\{L(f^k)\}_{k|r}$ jako sumy $DD^m(1)$ ciągów. Z konstrukcji wynika, że $D_r^m[f] = MF_r^{diff}(f)$.

Dla skończonego podzbioru $B \subset \mathbb{N}$ i liczby naturalnej wprowadzone są kombinatorycznie liczby naturalne $H(B, l)$ i $H_2(B, l)$. W oparciu o nie autor otrzymuje reprezentację kombinatoryczną dla $D_r^m[f] \pmod{\mathrm{reg}_{1,2}}$ dla gładkich odwzorowań $f : M \to M$ zwartych i jednospójnych rozmaitości wymiaru $m \geq 4$ (Twierdzenie 4.13). Dokładniej,

$$D_r^m[f] \pmod{\mathrm{reg}_{1,2}} =$$

$$\begin{cases} H_2(AP_r(f); l) & \text{jeśli m jest nieparzyste i r jest parzyste,} \\ H(AP_r(f); l) & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie $m = 2l + 1$ albo $m = 2l$ oraz

$$AP_r(f) = \{i : b_i \neq 0\} \cap \mathrm{Div}(r).$$

Ponadto, dla r nieparzystych (Wniosek 4.14)

$$D_r^m[f] \pmod{\mathrm{reg}_{1,2}} = D_r^m[f] \pmod{\mathrm{reg}_1} = H(Ap(r); l)).$$

Autor podaje (Twierdzenie 4.18) dokładną wartość $D_r^m[f] \pmod{\mathrm{reg}_{1,2}}$ w przypadku gdy $AP_r(f) = \mathrm{Div}(r)$ i r jest iloczynem co najmniej l różnych liczb pierwszych.

Następnie podany jest opis zbioru $AP_r(f)$ na 4-wymiarowych rozmaitości jednospójnych z określoną (dodatnio lub ujemnie) formą przecięcia. Następnie autor skupia się na badaniu odwzorowań sum spójnych zespolonych przestrzeni rzutowych $\mathbb{C}P^2$ $(\overline{\mathbb{C}P}^2)$. Rozważania te kończy podanie algorytmu obliczania $D_r^m[f] \pmod{\mathrm{reg}_{1,2}}$ w przypadku sumy spójnej dwóch przestrzeni $\mathbb{C}P^2$.

Ostatnia część rozprawy poświęcona jest badaniu niezmiennika $D_r(f; M, \partial M)$ zdefiniowanego przez Graffa i Jezierskiego dla odwzorowań gładkich pary $(M, \partial M)$ w siebie, gdzie M i ∂M są jednospójne. Liczba $D_r(f; M, \partial M)$ minimalizuje liczbę punktów r-okresowych w gładkiej klasie homotopii pary $(M, \partial M)$. Jej definicja, co do głównej idei, jest podobna do definicji $D_r^m[f]$. Autor podaje metody kombinatorycznego obliczania niezmiennika $D_r(f; M, \partial M)$. Podano również warunki kiedy $D_r(f; B^{m+1}, S^m)$ $(m \geq 3)$ jest równy 1 albo zero.

Uwagi i komentarze:

1. W definicji *danych okresowych* funkcji f (str. 31-32) są pewne nieścisłości. Podprzestrzeń E_x^{un} jest podprzestrzenią niestabilną dla

$D_x f^p$. Ponadto, typ orientacji Δ zależy tylko od $D_x f^p|_{E_x^{un}}$. Dokładniej, $\Delta = \operatorname{sgn} \det (D_x f^p|_{E_x^{un}})$.

2. Trochę razi używanie sformułowań typu: "w celu dokładnego zbadania minimalnej *ilości* punktów stałych...", "czy w klasie funkcji gładkich minimalna *ilość* punktów stałych..." (str. 11).

3. W zdaniu (str. 54) "Warto więc potrzebne elementy, które posłużą do znajdowania wartości niezmiennika i zalgorytmizowanie obliczeń." czegoś brakuje.

4. Rozprawa jest starannie napisana. Pomimo jej obszerności znalazłem tylko kilka literówek. Przykładowo, na str. 52 zamiast $U \subset \mathbb{R}$ powinno być $U \subset \mathbb{R}^m$.

Nieliczne krytyczne uwagi zawarte w recenzji nie zmieniają mojej zdecydowanie pozytywnej opini o rozprawie. **Stwierdzam, że rozprawa doktorska pana magistra Adriana Myszkowskiego spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

KWójcik