Warszawa 24.10.2022 r.

prof. dr hab. Janina Kotus
Wydział Matematyki
i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Adriana Myszkowskiego pt."Periodic expansion of the topological invariants of iterations in the theory of periodic points of smooth maps"

Promotorem recenzowanej rozprawy doktorskiej jest prof. dr hab. Grzegorz Graff z Politechniki Gdańskiej. Tematyka rozprawy dotyczy dyskretnych układów topologicznych, a dokładniej minimalizacji zbioru okresów w klasie homotopii dyfeomorfizów Morse'a-Smale'a oraz minimalizacji liczby punktów okresowych w gładkiej klasie homotopii. Część głównych wyników rozprawy została już opublikowana w pracach:

[1] G. Graff, J. Jezierski i A. Myszkowski, Computations of the least number of periodic points of smooth boundary-preserving self-maps of simply-connected manifolds, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 56 (2020), 589-606.

[2] G. Graff, M. Lebiedź i A. Myszkowski, Periodic expansion in determining minimal sets of Lefschetz periods for Morse-Smale diffeomorphisms, *J. Fixed Point Theory Appl* 21 (2019), 99-115.

Rozprawa składa się ze wstępu i 5 rozdziałów. Rozdział pierwszy zawiera listę oznaczeń stosowanych w pracy oraz definicje elementarnych pojęć (np. indeksu punktu stałego, liczby Lefschetza iteracji funkcji). Rozdział drugi dotyczy rozwinięć okresowych funkcji arytmetycznych, czyli zapisania ich za pomocą kombinacji pewnych bazowych ciągów okresowych, zwanych regami, oraz zbiorów algebraicznych. W szczególności, omówiono rozwinięcia okresowe liczb Lefschetza n-tej iteracji $\{L(f^n)\}_{n=1}^{\infty}$, rozwinięcia okresowe indeksów iteracji w punktach okresowych dyfeomorfizmów i rozwinięcia okresowe liczb Lefschetza funkcji quasi-unipotentnych. Opisano także kongruencje Dolda i ich związek z rozwinięciem okresowym.

W rozdziale trzecim bada się minimalny zbiór okresów Lefschetza $HPer(f)$ przekształceń zdefiniowanych na zwartych rozmaitościach Riemanna. Początki tej tematyki sięgają lat 70. ubiegłego wieku. Tymi zagadnieniami zajmowali się między innymi J. Guckenheimer, M. Misiurewicz, L.S. Yang, J. Llibre, W. Marzantowicz, G. Graff i inni. Z kolei, badanie minimalnego zbioru okresów $MPer_{ms}(f)$ dla gładkiej klasy homotopii dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a zdefiniowanych na zwartych rozmaitościach zainicjowali J.L. Giraco i J. Llibre. Zrobili to dla dyfemorfizmów Morse'a-Smale'a zdefiniowanych na dwuwymiarowym torusie. Ich praca jest też jedyną w której opisano realizację obu zbiorów tzn. minimalnych zbiorów okresów $HPer(f)$ i $MPer_{ms}(f)$. Prace J.L. Giraco i J. Llibre dały początek nowemu niezmiennikowi - minimalnemu zbiorowi okresów Lefschetza $MPer_L(f)$. Definicja ta bazuje na przedstawieniu funkcji zeta Lefschetza $Z_f(t)$ jako iloczynu

$$\prod_{t=1}^{\eta(f)} (1 + \Delta_i t^{r_i})^{m_i},$$

gdzie $\Delta \in \{-1, 1\}$, r_i są dodatnimi liczbami całkowitymi, m_i są niezerowymi liczbami całkowitymi oraz $\eta(f)$ jest liczbą naturalną zależną od funkcji f. Wtedy minimalny zbiór okresów Lefschetza $MPer_L(f) := \bigcap\{r_1, \ldots, r_{\eta(f)}\}$, gdzie przecięcie rozważamy po wszystkich możliwych przedstawieniach funkcji $Z_f(t)$. Korzystanie z tej definicji nastręcza pewne problemy, ponieważ nie ma metody gerującej wszystkie postacie funkcji zeta Lefschetza $Z_f(t)$. W efekcie obliczanie minimalnych zbiorów okresów Lefschetza $MPer_L(f)$ ogranicza się do niewielu przypadków. W rozdziale trzecim rozprawy zaproponowano nowy sposób obliczania niezmiennika $MPer_L(f)$ dla dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a, których liczba Lefschetza posiada okresowe rozwinięcie postaci $L(f^n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} b_i reg_i(n)$. Udowodniono, że

$$MPer_L(f) = \{i : b_i \neq 0 \text{ oraz i jest liczbą nieparzystą}\} \cap AP_r(f) \cap (2\mathbb{N} - 1)$$

(Twierdzenie 3.14). Wynik ten oznacza, że reprezentacja $MPer_L(f)$ wyraża się jednoznacznie za pomocą rozwinięcia okresowego liczb Lefschetza. Jest to pierwszy z głównych wyników rozprawy. Warto podkreślić, że ma on bardzo praktyczne znaczenie, ponieważ pozwala na dokładne obliczanie niezmiennika $MPer_L(f)$, gdyż znane są wzory na współczynniki b_i rozwinięcia okresowego liczb Lefschetza.

Drugie zagadnienie badane w rozdziale trzecim dotyczy realizacji zbioru minimalnych okresów Lefscheta odzworowań nieorientowalnej zwartej powierzchni N_g bez brzegu rodzaju g. Są to rozmaitości homeomorficzne ze spójną sumą g rzeczywistych powierzchni rzutowych, a jej grupy homologii wynoszą odpowiednio $H_0(N_g; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $H_2(N_g; \mathbb{Q}) = 0$ oraz

$$H_1(N_g; \mathbb{Q}) = \underbrace{\mathbb{Q} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}}_{g-1}.$$

W 2013 r. J. Llibre i V.F. Sirvent postawili pytanie: ,,czy dowolny skończony zbiór nieparzystych liczb naturalnych może być minimalnym zbiorem okresów Lefschetza dla pewnego C^1 dyfeomorfizmu Morse'a-Smale'a zdefiniowanego na nieorientowalnej zwartej powierzchni bez brzegu rodzaju g ?" Odpowiedź zawiera Twierdzenie 3.18, które orzeka, że taką konfigurację można zrealizować dla odwzorowań quasi-unipotentnych. Ponieważ dyfeomorfizmy Morse'a-Smale'a zwartych rozmaitości są funkcjami quasi-unipotentnymi (tzn. homorfizm grup homologii indukowany przez przez dyfeomorfizm Morse'a-Smale'a ma jako wartości własne tylko pierwiastki pierwotne z jedynki), zatem Twierdzenie 3.18 daje częściową odpowiedź na pytanie

J. Llibre i V.F. Sirventa. Do rozstrzygnięcia pozostaje jeszcze kwestia, czy każde odwzorowanie otrzymane w Twierdzeniu 3.18 jest homorfizmem indukowanym przez dyfeomorfizm Morse'a-Smale'a określony na rozmaitości N_g. W dowodzie Twierdzenia 3.18 skorzystano z poprzedniego wyniku, czyli Twierdzenia 3.14, mówiącego o nowym sposobie obliczania minimalnego zbióru okresów Lefschetza $MPer_L(f)$. Kolejny wynik, udowodniony w rozdziale trzecim, jest odpowiedzią na inne pytanie J. Llibre i V.F. Sirventa: ,,czy dowolny skończony zbiór nieparzystych liczb naturalnych może być minimalnym zbiorem okresów Lefschetza dla pewnego C^1 dyfeomorfizmu Morse'a-Smale'a zdefiniowanego na orientowalnej zwartej powierzchni M_g bez brzegu rodzaju g?" Po pierwsze udowodniono, że w tym przypadku jeśli dyfeomorfizm Morse'a-Smale'a zmienia orientację, to minimalny zbiór okresów Lefschetza $MPer_L(f)$ jest zbiorem pustym. Analogicznie, jak w poprzednim pytaniu uzyskano odpowiedź pozytywną dla odwzorowań quasi-unipotentnych, czyli pokazano, że skonstruowane przekształcenie spełnia warunki konieczne dla istnienia homorfizmu indukowanego przez dyfeomorfizm Morse'a-Smale'a. W obu przypadkach podano też postać funkcji zeta Lefschetza dla skonstruowanych przekształceń quasi-unipotentnych. Ostatni problem rozważany w tym rozdziale został postawiony przez B. Iskrę i V.F. Sirventa, którzy podali postać funkcji zeta Lefschetza (wzór 3.21) przekształcenia quasi-unipotentnego generowanego przez zmieniający orientację dyfeomorfizm Morse'a-Smale'a rozmaitości M_g. Dla quasi-unipotentnego przekształcenia zachowującego orientację postać funkcji zeta Lefschetza podali J. Llibre and V.F. Sirvent (także wzór 3.21). Analogicznie, jak poprzednio, zdefiniowano dla tych przekształceń minimalny zbiór okresów Lefschetza. W pracy udowodniono, że dla skończonego zbioru liczb nieparzystych S istnieje funcja zeta Lefschetza postaci zadanej wzorem (3.21), dla której zbiór S jest minimalnym zbiorem okresów Lefschetza. Wynik ten zawiera Lemat 3.34. Odpowiedzi na przytoczone wyżej pytania stanowią drugi główny wynik rozprawy.

Na zakończenie rozdziału trzeciego opisano algorytm służący do znajdowania minimalnych zbiorów okresów Lefschetza $MPer_L(f)$ dla dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a rozmaitości N_g. Korzystając z tego algorytmu doktorant i promotor policzyli minimalne zbiory okresów Lefschetza dla dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a rozmaitości N_g dla $g = 1, \ldots, 54$ i dla rozmaitości M_g dla $g = 1, \ldots, 20$. Uzyskane wyniki porównano z wyliczeniami J. Llibre i V.F. Sirventa, wskazując nieuwzględniony przez nich przypadek. Warto dodać, że stworzenie algorytmu stało się możliwe dzięki udowodnionemu wcześniej Twierdzeniu 3.14.

Rozdział czwarty i piąty dotyczy minimalizacji liczby punktów r-okresowych funkcji f zdefiniowanej na jednospójnej rozmaitości zwartej bez brzegu lub z jednospójnym brzegiem w klasie C^1-homotopii. Początki tej teorii pochodzą od J. Nielsena. Tymi zagadnieniami zajmowali się między innymi A. Dold, S.N. Chow, J. Mallet-Paret, J.A. York, M. Schub, D. Sullivan, a także J. Jezierski, G. Graff i P. Nowak-Przygodzki. We wstępie przypomniano definicję liczby Nielsena $NF_r(f)$ rzędu r odwzorowania f oraz rezultat J. Jezierskiego mówiący, że liczba Nielsena $NF_r(f)$ równa się minimum z liczby punktów stałych iteracji g^r dla przekształceń g homotopijnych z f. W podrozdziale pierwszym przypomniano konstrukcję niezmiennika Dolda $D_r^m[f]$. Jego twórcami są G. Graff i J. Jezierski, którzy stworzyli analogon teorii Nielsena dla gładkich klas homotopii. W szczególności G. Graff i J. Jezierski udowodnili, że dla przekształcenia f klasy C^1 zwartej, gładkiej i jednospójnej rozmaitości M wymiaru $m \geq 3$ i ustalonego $r \in \mathbb{N}$, niezmiennik Dolda $D_r^m[f]$ równy jest minimum z liczby punktów stałych iteracji g^r dla g homotopijnych z f. Ważnym zagadnieniem w tej teorii jest określenie warunków koniecznych, które spełniają indeksy punktu stałego. Dla ciągłej klasy homotopii A. Dold udowodnił, że ciąg indeksów punktu stałego musi spełniać warunek nazwany kongruencją Dolda. W przypadku gładkiej klasy homotopii warunki są o wiele bardziej restryktywne. Wynika to z prac M. Shuba i D. Sullivana oraz S.N. Chowa, J. Mallet-Paret i J.A. Yorka. Przypuszczano także, że warunki wskazane przez S.N. Chow, J. Mallet-Paret i J.A. Yorka są również wystarczające do realizacji dowolnego ciągu liczb całkowitych jako ciągu indeksów pewnej funkcji klasy C^1. Pełne rozwiązanie tej hipotezy dla dowolnego wymiaru $m \in \mathbb{N}$ przedstawili G. Graff, J. Jezierski i P. Nowak-Przygodzki. Kolejnym aspektem w tej teorii jest obliczanie niezmiennika Dolda $D_r^m[f]$. Dotychczas metody kombinatorczne obliczania tego współczynnika znane były tylko dla r-nieparzystych i tylko w tym przypadku znany był algorytm pozwalający go obliczyć. W pracy [2], wymienionej wyżej, wprowadzono nowy niezmiennik $H(B,l)$ i podano jego kombinatoryczną konstrukcję. W rozdziale czwartym zdefiniowano dodatkowy niezmiennik $H_2(B,l)$ i podano jego kombinatoryczną konstrukcję. W sumie pozwoliło to obliczyć niezmiennik Dolda $D_r^m[f]$ także dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$ (Twierdzenie 4.13 i Twierdzenie 4.20) uogólniając wcześniejsze wyniki G. Graffa i J. Jezierskiego na przypadek parzystych r. To uogólnienie jest trzecim głównym wynikiem rozprawy.

Kolejny rezultat uzyskany w rozdziale czwartym dotyczy gładkiego odwzorowania f sumy spójnej dwóch zespolonych powierzchni rzutowych stopnia $deg(f) = k > 1$. Udowodniono, że wtedy zbiór okresów algebraicznych $AP(f)$ jest tożsamy ze zbiorem liczb naturalnych (Twierdzenie 4.34). Następnie dla sumy spójnej m zespolonych przestrzeni rzutowych stopnia $deg(f) = k > 1$ i dla r, będącego iloczynem liczb pierwszych, policzono dokładną wartość niezmiennika $D_r^4[f]$ (Twierdzenie 4.36). Na zakończenie rozdziału czwartego podano algorytm do obliczenia wartości $D_r^4[f]$ dla małych r.

W piątym rozdziale pracy bada się niezmiennik $D_r(f; M, \partial M)$ zdefiniowany przez dekompozycję ciągów liczb Lefschetza $\{L(f^n)\}_{n=1}^{\infty}$ $\{L(\bar{f}^n)\}_{n=1}^{\infty}$ iteracji funkcji f^n i $\bar{f}^n = f^n_{|\partial M}$ na minimalną liczbę odpowiednich kombinacji ciągów indeksów punktu stałego w punktach stałych iteracji. G. Graff i J. Jezierski udowodnili, że dla gładkich, zwartych i jednospójnych rozmaitości wymiaru $m \geq 4$ z jednospójnym brzegiem ∂M i $r \in \mathbb{N}$ zachodzi, że

$$D_r(f; M, \partial M) = \min_{(g,\bar{g}) \sim (f,\bar{f})} \sharp \mathrm{Fix}(g^r).$$

Pierwszy wynik tego rozdziału zawiera odpowiedź na pytanie, kiedy niezmienik $D_r(f; M, \partial M)$ wynosi 1 lub 0. Odpowiedź zawiera Twierdzenie 5.11, które podaje warunki konieczne i dostateczne, jakie musi spełniać para funkcji $(f, \bar{f})$ przekształcająca (B^{m+1}, S^m) w siebie, $m \geq 3$, aby liczbę r punktów okresowych można było zredukować do jednego punktu w klasie C^1 homotopii dla r nieparzystych, będących iloczynem potęg liczb pierwszych. Następnie zaproponowano kombinatoryczny sposób obliczania $D_r(f; M, \partial M)$ (Twierdzenie 5.14 i 5.16). Ostatnie zagadnienie rozpatrywane w tym rozdziale dotyczy znalezienia warunków pozwalających na zredukowanie obliczeń niezmiennika $D_r(f; M, \partial M)$ odpowiednio dobrana i obszerna literaturado obliczenia $D_r^m[\bar{f}]$ dla przekształcenia $\bar{f}$ przekształcającego ∂M w siebie. Warunki te sformułowano w Twierdzeniu 5.21, w którym także obliczono wartości niezmiennika $D_r(f; M, \partial M)$. Rezultaty uzyskane w tym rodziale stanowią czwarty główny wynik rozprawy.

Praca zredagowana jest dość starannie, niemniej zdarzają się pomyłki dotyczące głównie odwołań. Np. na stronie 13 powołano się na artykuł W. Marzantowicza i P. Nowaka - Przygodzkiego podając błędnie numer [12]. Na tej samej stronie powołano się na Twierdzenie 2.5 z rozdziału drugiego. Niestety, nie ma w nim twierdzenia o takim numerze. Układ pracy jest bardzo dobrze przemyślany. Bardzo pomocna jest lista oznaczeń umieszczona na początku rozdziału pierwszego. Świetnie zredagowany jest wstęp, który jest dobrym przewodnikiem po rozprawie. W mojej ocenie rozprawa doktorska mgr. Adriana Myszkowskiego spełnia kluczowe wymagania, które stawia się rozprawom doktorskim. Przede wszystkim rozprawa prezentuje bardzo dobrą znajomość tematyki, o czym świadczy odpowiednio dobrana i obszerna literatura, a także korzystanie z najnowszych technik i rezultatów. Praca zawiera wiele oryginalnych wyników z zakresu topologicznych niezmienników przekształceń ciągłych/gładkich zwartych rozmaitości w zadanej klasie homotopii. Jest to dział topologicznych układów dynamicznych, który w ciągu ostatniej dekady dość intensywnie się rozwija. Niemała w tym zasługa promotora rozprawy i jego współpracowników. W rozprawie podano efektywne metody policzenia wielu ważnych niezmienników, czasami było to doliczenie brakujących przypadków, w większości jednak zrobiono to po raz pierwszy. Jej istotnym rezultatem są twierdzenia dotyczące realizacji zadanych konfiguracji niezmienników. Wreszcie podano algorytmy, dzięki którym znaleziono wszystkie konfiguracje niezmienników dla badanych odwzorowań. Uzyskane wyniki wymagały pomysłowości, a zaprezentowane dowody świadczą o świetnym opanowaniu warsztatu, w tym także informatycznego.

Rozprawa mgr. Adriana Myszkowskiego spełnia zwyczajowe wymagania stawiane w środowisku matematycznym rozprawom doktorskim. Spełnia także wymagania art. 187 Ustęp 1 i 2 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce. Dlatego wnoszę o dopuszczenie pana mgr. Adriana Myszkowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.