

Wpłynęło dnia 2022 -11- 16



L. dz. ... 56/2022



Dr. hab. Jan P. Borowski, profesor AGH
Kierownik Katedry Równań Różniczkowych
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków
www: <http://home.agh.edu.pl/boronski>
e-mail: boronski@agh.edu.pl

Katowice, 13 listopada 2022

Recenzja

Niniejszy dokument jest recenzją rozprawy doktorskiej mgr-a Adriana Myszkowskiego, napisanej pod kierunkiem prof. dr hab. Grzegorza Graffa na Politechnice Gdańskiej.

Omawiana tu rozprawa zajmuje się badaniem zbiorów punktów okresowych przekształceń rozmaitości topologicznych. Po omówieniu tematyki pracy w rozdziale Wstęp, autor przedstawia podstawowe definicje i twierdzenia w rozdziale Preliminaria. Następnie, w rozdziale drugim, wprowadza definicję rozwinięcia okresowego funkcji arytmetycznej oraz zbioru okresów algebraicznych. Pozostała część rozprawy zawiera właściwe wyniki. Można w niej wyróżnić dwie główne części.

W pierwszej (Rozdział 3) autor wprowadza nową reprezentację zbioru minimalnych okresów Lefschetza, za pomocą rozwinięcia okresowego ciągu liczb Lefschetza dla dyfeomorfizmów Morse'a-Smale'a rozmaitości zamkniętych. Następnie pokazuje, że korzystając z niej można uzyskać nowe wyniki dotyczące realizacji minimalnych zbiorów Lefschetza, odpowiadając częściowo na dwa pytania z literatury Llibre i Sirventa, oraz całkowicie na pytanie Iskry i Sirventa. Ta część wydaje się być w znakomitej większości tłumaczeniem artykułu [39].

W drugiej części autor zajmuje się minimalizacją liczby punktów r -okresowych w gładkich klasach homotopii rozmaitości bez brzegu (Rozdział 4, oparty na współpracy z promotorem oraz J. Jezierskim, zawartej w [35]) oraz z brzegiem (Rozdział 5, oparty na preprincie będącym wynikiem współpracy z autorami [35] oraz D. Haibao). Przejdę teraz do omówienia mocnych i słabych stron rozprawy.

Mocne strony

- (1) **Tematyka.** Istnieje spora międzynarodowa grupa matematyków zajmująca się badaną tematyką, a narzędzia wymagają wiedzy z zakresu kilku dziedzin matematyki takich jak topologia, algebra, teoria liczb, układy dynamiczne.
- (2) **Wyniki:** Wyniki są nietrywialne, aktualne, rozwiązują całkowicie lub częściowo problemy postawione w literaturze, istotnie posuwają na przód badania w badanym obszarze, są implementowalne w postaci algorytmów, dostarczając dane udostępnione na Moście Danych.
- (3) **Warsztat:** Wyniki częściowo powstały we współpracy międzynarodowej oraz w ramach prestiżowego projektu finansowanego przez NCN.

Słabe strony

- (a) **Rygor matematyczny:** Kilkukrotnie można odnieść wrażenie (może mylne) jakoby autor zwyczajnie przetłumaczył fragmenty artykułów napisanych wraz z dojrzałymi już badaczami, nie zadając sobie trudu aby zastanowić się nad głębszym znaczeniem cytowanych twierdzeń oraz precyzją ich wypowiedzenia. Nie tłumaczy rozbieżności pomiędzy użytymi sformułowaniami cytowanych wyników z literatury, a sformułowaniami tychże twierdzeń w samej literaturze (co czasem prowadzi do sformułowań fałszywych, gdy pomijane są założenia). Można też odnieść wrażenie (może błędne), że doktorant bardziej skupił się na aspektach arytmetycznych badanej problematyki, niekoniecznie w pełni zdając sobie sprawę z głębi topologicznych aspektów używanych wyników. Równocześnie rozprawa zawiera na prawdę sporo wyników, a doktorant opracował bardzo bogaty zasób danych będących zastosowaniem przedstawionych tu twierdzeń [41-50], więc pewna liczba usterek jest zrozumiała. Z drugiej strony może lepiej byłoby wypracować trochę mniej a dokładniej? Koniec końców precyzja jest jednym z najważniejszych aspektów pracy dojrzałego matematyka.
- (b) **Redakcja tekstu:** Praca napisana jest dość nierówno. Rozdział 2 i 3 są napisane dość niechlujnie, np. kilkakrotnie nie zgadza się numeracja. Problemy występują też w Bibliografii oraz Rozdziale 4 i 5, choć te ostatnie czyta się bardzo dobrze i wydają się być napisane dużo staranniej.

Poniżej bardziej szczegółowo przedstawiam swoje uwagi, wliczając w to dostrzeżone drobne literówki.

- Str. 9, początek drugiego akapitu: "Zacznijmy do" → "Zacznijmy od"
- Str.13, linijka 6: "(...) punktu stałego i po liczb Lefschetza (...)" wymaga korekty
- Str. 13, l.10: Twierdzenie 2.5 nie istnieje, czy chodziło o Twierdzenie 2.9?
- Str. 17, Definicja 1.6: $f^{-1}(\{0\}) = ?$
- Str. 26, Twierdzenie 2.9 jak rozumiem jest wynikiem oryginalnym autora z promotorem. Warto jeszcze raz to skomentować anonsując to Twierdzenie na stronie 25.
- Str. 28, Wniosek 2.14: Lemat 3.9 nie istnieje.
- Str. 28, pierwszy akapit: "Naturalnym pytaniem jest, będzie jest (...)" wymaga korekty
- Str. 29, drugi akapit: może warto byłoby tu wspomnieć o wynikach dla kofrontierów i ich relacji do hipotezy Schuba?
- Str. 29: brakuje tu moim zdaniem wzmianki, że wyniki w tym rozdziale pochodzą z pracy [39]. Nie jest też łatwo odnaleźć stosowną wzmiankę o tym we wstępie.
- Str. 30, Lemat 3.2: ten fakt jest świetnie znany, trudno nazwać go lematem, zamiast dowodu powinno zostać podane odniesienie do literatury.
- Str. 30, Lemat 3.5: j.w., dla Lematu 3.2.
- Str. 32-33: brakuje mi tu rozróżnienia narracji dla wyników uzyskanych przez innych badaczy i tych z [39], współautorstwa doktoranta, które są przedmiotem tego rozdziału, a nie tylko tłem.
- Str. 33 Przykład 3.11: Skąd wiadomo, że rozpatrywany dyfeomorfizm istnieje? Przydałoby się tu odniesienie do literatury.
- Str. 35, l. 11 od dołu: "nie zmienia" → "nie zmieniając".
- Str. 38: pomiędzy (3.14) a (3.15) autor odwołuje się do Definicji 3.13, ale taka definicja nie istnieje.
- Str. 38, Twierdzenie 3.18: brakuje "istnieje $g \in \mathbb{N}$ i " przed "istnieje funkcja". Uważam to za istotne przeoczenie.
- Str. 40, Wniosek 3.20: Twierdzenie 2.15 nie istnieje.

- Str. 40, Twierdzenie 3.22: autor podaje odnośnik do Twierdzenia 2.4 w [90], które jednak posiada inną treść (występuje w nim kohomologia innych przestrzeni, z innym współczynnikami). Należy zacytować inny wynik, albo szczegółowo wyjaśnić dlaczego Twierdzenie 3.22 jest prawdziwe. Tą kwestie uważam za bardzo istotną.
- Str. 48, Podrozdział 3.7: "W tej części opiszemy prosty algorytm..." Sam algorytm właściwie nie został tu opisany, szczególnie jeśli porównamy to z bardzo dobrym opisem algorytmu w podrozdziale 4.5.
- Str. 48, Lemat 3.35: ten wynik jest udowodniony w [91], więc nie rozumiem użycia "por. [91]" zamiast "[91]".
- Str. 48, Wniosek 3.36: w jaki sposób jest to wniosek z Lematu 3.35? Brakuje przedyskutowania przypadków $n = 2, 4, 6, 10, 12, 18, 30$.
- Str. 52, Definicja 4.1: powinno być $U \subset \mathbb{R}^m$.
- Str. 52, Twierdzenie 4.4: $D_r^m[f]$ jest zdefiniowany jako minimum w klasie homotopii f , a powinno być to minimum w gładkiej klasie homotopii. Oczywiście jest to najprawdopodobniej przeoczenie, że pożądanym symbol "s" nie pojawił się nad "~", ale jako że jest to kwestia fundamentalna dla rozważań tego i następnego rozdziału, wydaje mi się bardzo niefortunne i zaskakujące że autor nie sprawdził poprawności tego symbolu, tym bardziej że błąd ten powtarza się też później.
- Str. 53, Twierdzenie 4.6: cytowane twierdzenia zakładają $m > 1$. Dlaczego autor pominął to założenie?
- Str. 62, Twierdzenie 4.22: autor powołuje się tu na bardzo głęboki wynik topologiczny Freedmana, Twierdzenie 1.5 z [22]. Sformułowanie jest jednak istotnie inne. Moim zdaniem bezwzględnie są tu potrzebne szczegółowe wyjaśnienia dlaczego oba twierdzenia są równoważne. Trzeba między innymi (choć nie tylko) uzasadnić przejście od homologii do kohomologii, a także zasadność drugiej części Twierdzenia 4.22, od słowa "Przeciwnie". Uważam tą kwestię za bardzo istotną, a fakt luźnego podejścia autora do tak głębokiego wyniku topologicznego za niepokojący. Oczywiście, może wystarczy powołać się tylko na jakąś inną, późniejszą publikację, która wyjaśnia te wszystkie kwestie.
- Str. 65, linijka 10 od dołu: "(por. [11])". Autor powołuje się na podręcznik mający ponad 150 stron, gdzie dokładnie znajduje się cytowany wynik?
- Str. 71, podrozdział 4.5: algorytm został tu opisany w sposób bardzo szczegółowy i przejrzysty, w przeciwieństwie do podrozdziału 3.7. Cały rozdział 4 czyta się bardzo dobrze.
- Str. 76, Twierdzenie 5.5: znowu brakuje symbolu gładkiej klasy homotopii (!).
- Str. 77, l.7: "dowolna para" → "dowolna para".
- Str. 77, początek podrozdziału 5.3: "Przypomnijmy, że z Twierdzenia 5.1 zawartego w [63], własność ta zachodzi dla funkcji ciągłych rozmaitości jednorodnych w sobie". Cytowane twierdzenie posiada założenie, że rozmaitości te powinny być kawałkami liniowe (oraz $m \geq 3$). Jak dobrze wiadomo (np. z cytowanej wcześniej pracy Freedmana) istnieją 4-wymiarowe rozmaitości jednorodne nie posiadające takiej struktury (np. E_8). Ponownie niepokoi lekkie podejście autora do założeń cytowanych przez niego wyników.
- Str. 78, Lemat 5.10: autor powołuje się na twierdzenie 1.2 z [79], które dotyczy odwzorowań transwersalnych. Dlaczego autor w żaden sposób nie odniósł się do tego założenia (ponownie ten sam problem!)?
- Str. 86, Twierdzenie 5.21: z chęcią zobaczyłbym tu komentarz dotyczący relacji tego twierdzenia do Twierdzenia 6.3 w [32].
- Bibliografia, [32]: "2012" → "2013"

- Bibliografia, [51]: ten artykuł nie ukazał się w Arkiv for Matematik, ale w Univ. Iagel. Acta. Math.. Z tego co wiem w 1951r. autorów nie było jeszcze na świecie.
- Bibliografia, [60]: pozycja alfabetycznie powinna znaleźć się wcześniej.
- Bibliografia, [68]: brak poprawnego tytułu oraz czasopisma.
- Bibliografia: szkoda, że zabrakło tu "Handbook of Topological Fixed Point Theory". 1st ed. 2005 Edition. ISBN-13: 978-1402032219

Konkluzja

Pomimo wymienionych niedociągnięć, omawianą tu rozprawę doktorską jako całość oceniam pozytywnie. Na szczególne podkreślenie zasługuje istotność i nietrywialność tematyki którą zajmuje się autor, mnogość wyników, a także fakt rozwiązania (częściowego lub całkowitego) problemów otwartych z literatury. **W związku z powyższym uważam, że spełnione są wymogi ustawowe i wnioskuję o dopuszczenie jej do obrony.** Podczas obrony chciałbym aby autor odniósł się do moich komentarzy dotyczących Twierdzenia 3.22, Twierdzenia 4.22, oraz Lematu 5.10 i założenia transwersalności.

Z poważaniem,

