

Autoreferat

1

dr inż. Maciej Starostka

Instytut Matematyki Stosowanej

Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej

Politechnika Gdańska

Gabriela Narutowicza 11/12,

80-233 Gdańsk

e-mail: maciej.starostka@pg.edu.pl

2 Posiadane tytuły i dyplomy

- 2017 - **doktor nauk matematycznych**,
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk,
rozprawa: *E-cohomological Conley index*,
promotor: prof. Marek Izydorek
- 2011 - **magister matematyki**,
Politechnika Gdańska
praca magisterska: *Topological degree, Seiberg-Witten invariants and the wall crossing formula*
promotor: prof. Marek Izydorek

3 Zatrudnienie w jednostkach naukowych

- 1.10.2021-30.09.2023 - PostDok, **Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg**,
Niemcy opiekun stażu: prof. Nils Waterstraat
- 1.04.2018 - 31.03.2020 - PostDok, **Ruhr Universität Bochum**, Niemcy,
opiekun stażu: prof. Alberto Abbondandolo
- 2017 - adiunkt, Instytut Matematyki Stosowanej, Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej, **Politechnika Gdańska**

4 Wskazanie osiągnięcia habilitacyjnego

Rozprawa habilitacyjna zatytułowana

Teoria Morse’a dla hamiltonowskiego funkcjonału działania i klasy funkcjonałów na przestrzeni Banacha

składa się z cyklu prac:

- [H1] L. Asselle, M. Starostka, *The Palais–Smale condition for the Hamiltonian action on a mixed regularity space of loops in cotangent bundles and applications*, Calculus of Variations and PDEs, 2020
- [H2] L. Asselle, M. Starostka, *Morse homology for the Hamiltonian action in cotangent bundles*, Calculus of Variations and PDEs, 2025
- [H3] L. Asselle, M. Starostka, *A note on the Morse homology for a class of functionals in Banach spaces involving the 2p-area functional*, Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA. 2024
- [H4] M. Starostka, *Connected components of the space of proper gradient vector fields*, Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2022
- [H5] L. Asselle, M. Izydorek, M. Starostka, *The Arnold conjecture in $\mathbb{C}P^n$ and the Conley index*, Discrete and Continuous Dynamical Systems B, 2023
- [H6] L. Asselle, M. Starostka *On the degenerate Arnold conjecture on $T^{2m} \times \mathbb{C}P^n$* , Topological Methods in Nonlinear Analysis, 2025

4.1 Omówienie osiągnięcia habilitacyjnego

4.1.1 Zarys tematyki badawczej

Klasyczna teoria Morse’a zajmuje się badaniem zmiany topologii przeciwobrazów $f^{-1}((-\infty, a))$ dla gładkich funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie M jest zamkniętą (zwarłą i bez brzegu) rozmaitością. Teorię tę można podsumować (patrz [B]) dwoma twierdzeniami: Niech a i b będą wartościami regularnymi. Wówczas

1. jeżeli przedział $[a, b]$ zawiera jedynie wartości regularne to przeciwobrazy $f^{-1}((-\infty, a))$ i $f^{-1}((-\infty, b))$ są dyfeomorficzne;
2. jeżeli istnieje dokładnie jeden punkt krytyczny p o wartości krytycznej $f(p) \in (a, b)$ to $f^{-1}((-\infty, b))$ jest homotopijnie równoważne z $f^{-1}((-\infty, a)) \cup e_{\lambda_p}$, tj. $f^{-1}((-\infty, a))$ z doklejoną komórką wymiaru λ_p ,

gdzie λ_p oznacza indeks Morse'a, tzn. ilość ujemnych wartości własnych (liczonych z krotnością) hesjanu $D^2 f(p)$. Powyższe twierdzenia pozwalają na uzyskanie nierówności Morse'a czyli nierówności pomiędzy ilością punktów krytycznych o danym indeksie Morse'a, a liczbami Bettiego - rangami kohomologii danej rozmaitości.

Stephen Smale zmienił sposób patrzenia na teorię Morse'a poprzez pokazanie jej związków z układami dynamicznymi. Rozpatrując potok generowany przez $-\nabla f$ możemy otrzymać kompleks łańcuchowy, w którym generatorami są punkty krytyczne funkcji f , a operator brzegu jest zdefiniowany poprzez liczenie przecięć rozmaitości stabilnych i niestabilnych pary punktów krytycznych. Kompleks ten występuje w literaturze pod wieloma nazwiskami: kompleks Morse'a, Smale'a, Wittena. Kohomologie kompleksu są izomorficzne z kohomologiami singularnymi wyjściowej rozmaitości czego natychmiastową konsekwencją są nierówności Morse'a. Teoria Morse'a okazuje się być przydatna w problemach wariacyjnych. Wówczas funkcja jest zdefiniowana na nieskończonej wymiarowej rozmaitości Banacha lub Hilberta. W przypadku, gdy indeks Morse'a jest skończony można próbować dowodzić istnienia punktów krytycznych przy pomocy klasycznego podejścia do teorii Morse'a. W tym celu R. Palais i S. Smale'a wprowadzili abstrakcyjny warunek zwartości nazwany później warunkiem Palais-Smale'a. W przypadku funkcjonałów silnie nieokreślonych, to jest takich, dla których indeks i koindeks Morse'a są nieskończone, nie można zastosować już klasycznej teorii Morse'a. Spowodowane to jest faktem, że doklejenie nieskończonej wymiarowej komórki nie zmienia topologii. Okazuje się jednak, że w wielu przypadkach kompleks Morse'a-Smale'a jest wciąż dobrze zdefiniowany.

Warto zaznaczyć, że z idei definiowania operatora brzegu przez zliczanie orbit łączących punkty krytyczne wyrosła teoria Floera. W teorii Floera funkcjonał nie indukuje potoku, ale orbity łączące punkty krytyczne mogą być interpretowane jako pewne obiekty geometryczne lub równoważnie jako rozwiązania cząstkowych równań różniczkowych. Podejście to okazało się niezwykle owocne w przypadkach, w których niemożliwe jest zdefiniowanie potoku posiadającego odpowiednie własności. **Gdy dla danego funkcjonału możliwe jest zastosowanie zarówno teorii Morse'a (potok jest dobrze zdefiniowany) i teorii Floer'a (brak potoku), teoria Morse'a jest znacznie mniej skomplikowana z analitycznego punktu widzenia.** Widać to wyraźnie w przypadku funkcjonału działania dla układów hamiltonowskich na T^{2m} ([CZ], [Pub2]) czy $\mathbb{C}P^n$ ([Fo],[H5]). Klasa funkcjonałów, dla których kompleks Morse'a-Smale'a jest dobrze zdefiniowany powinna być więc w miarę możliwości poszerzana sytuacji, gdy istnieje odpowiednia teoria Floera obejmująca dany funkcjonał.

W pracach [H1] i [H2] pokazujemy, że dla problemu układów hamiltonowskich na wiązkach kostycznych kompleks Morse'a-Smale'a jest dobrze zdefiniowany. W szczególności w [H1] pokazujemy, że hamiltonowski funk-

cjonał działania rozpatrywany na odpowiedniej rozmaitości Hilberta spełnia warunek Palais-Smale'a. Jako konsekwencje podajemy uproszczony dowód wyniku otrzymanego przez H. Hofera i C. Viterbo w [HV] dotyczącego hipotezy Weinstein'a na wiązkach kostycznych.

Kontynuując rozważania rozpoczęte w [H1], w pracy [H2] pokazujemy, że przy dobranym przez nas podejściu analitycznym kompleks Morse'a-Smale'a jest dobrze zdefiniowany. Praca zawiera również abstrakcyjny wynik dotyczący możliwości zaburzeń pól gradientowych w taki sposób, żeby otrzymać transversalność przecięć rozmaitości stabilnych i niestabilnych. Ten abstrakcyjny wynik można traktować jako uzupełnienie do pracy [AM05] A. Abbondandolo, P. Majer, *A Morse complex for infinite dimensional manifolds - Part I*. Część druga tej pracy nigdy nie powstała w wersji do publikacji. Praca [H2] pokazuje również pierwsze zastosowanie abstrakcyjnej teorii przedstawionej przez A. Abbondandolo i P. Majera w [AM05].

Dla wielu funkcyjonałów pochodzących z problemów fizycznych naturalną dziedziną jest przestrzeń (bądź rozmaitość) Banacha, a nie Hilberta. Naturalne wydaje się więc pytanie, czy również w tym przypadku możemy zdefiniować kompleks Morse'a-Smale'a i zastosować go do problemu istnienia punktów krytycznych - rozwiązań równań różniczkowych. Problemy pojawiają się już na etapie definicji niezdegenerowanego punktu krytycznego. Standardowa definicja dla funkcji określonej na przestrzeni Hilberta mówi, że punkt x jest niezdegenerowanym punktem krytycznym jeżeli $Df(x) = 0$ i $D^2f(x)$ jest izomorfizmem. Odwzorowanie $D^2f(x)$ jest odwzorowaniem z przestrzeni X do przestrzeni dualnej X^* . W konsekwencji jeżeli przestrzeń Banacha nie jest izomorficzna z jej przestrzenią dualną to **nie istnieje funkcyjonał posiadający niezdegenerowany punkt krytyczny wedle standardowej definicji**. Również przestrzeń Banacha izomorficzna ze swoją przestrzenią dualną nie dopuszcza niezdegenerowanych punktów krytycznych. Okazuje się ([MP]), że jeżeli funkcyjonał na przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|_1)$ ma niezdegenerowany punkt krytyczny to istnieje równoważna norma $\|\cdot\|_2$ na X taka, że $(X, \|\cdot\|_2)$ jest przestrzenią Hilberta. W przypadku przestrzeni Banacha definicja niezdegenerowanego punktu krytycznego musi więc być zmodyfikowana. W literaturze istnieją różne nierównoważne definicje niezdegenerowanego punktu krytycznego w przestrzeni Banacha. W szczególności, takie definicje zaproponowali A. Abbondandolo [AM04], S. Smale, A. J. Tromba [Tr] czy K. Uhlenbeck ([Uh]). W pracy [CV] autorki rozpatrywały funkcyjonał, którego naturalną dziedziną jest przestrzeń Banacha $W_0^{1,2p}(\Omega)$ i pokazały, że propozycja S. Smale'a, to jest założenie, że $D^2f(x)$ jest iniekcją, jest wystarczające do badania grup krytycznych. W [H3] **pokazujemy, że dla tego typu funkcyjonałów można zdefiniować nie tylko grupy krytyczne, ale również kompleks Morse'a-Smale'a**. Jako wniosek otrzymujemy twierdzenie o istnieniu i krotności punktów krytycznych.

Definicja niezdegenerowanego punktu krytycznego nie jest jedynym problemem, z którym się stykamy, gdy chcemy zdefiniować kompleks Morse’a-Smale’a na przestrzeni Banacha. W przestrzeni Banacha nie mamy już pojęcia pola gradientowego. Co prawda zawsze istnieje pole pseudogradientowe, ale konstrukcja tego pola gwarantuje, że pole jest gładkie poza zbiorem punktów krytycznych i jedynie ciągle w punktach krytycznych. W wyniku tego nie można wprost zastosować twierdzenia o rozmaitości stabilnej. W [H3], przy odpowiednich założeniach, **konstruujemy pole pseudogradientowe, które jest gładkie na całej przestrzeni $W_0^{1,2p}$** .

Warto wspomnieć, że w [AM05] autorzy podali abstrakcyjne warunki na przestrzeni Banacha na to, żeby kompleks Morse’a-Smale’a był dobrze zdefiniowany. W [H3] pokazaliśmy, że warunek zaproponowany przez S. Smale jest w tym przypadku wystarczający, aby osiągnąć warunki z pracy [AM05]. Podobnie jak w opisanym wyżej przypadku hamiltonowskiego funkcjonału działania jest to pierwsze zastosowanie abstrakcyjnej teorii zdefiniowanej w [AM05] przez A. Abbondandolo i P. Majera w przestrzeniach Banacha.

Innym podejściem do teorii Morse’a jest podejście poprzez indeks Conleya. Charles Conley w [Con] nazwał zdefiniowany przez siebie obiekt indeksem Morse’a w przypadku zdegenerowanym. Co prawda indeks Conleya jest typem homotopii, poniżej przez indeks Conleya będziemy rozumieli kohomologiczny indeks Conleya, to znaczy kohomologie pary indeksowej. W przypadku, gdy obydwie teorie są dobrze zdefiniowane, czyli np. dla gradientowych potoków na $\mathbb{R}^n$ spełniających warunek Palais-Smale’a i warunki transversalności, indeks Conleya i kohomologie Morse’a są izomorficzne. Wynik ten uogólnia się przy dodatkowych założeniach również na przestrzenie Hilberta [Pub1]. Należy podkreślić, że teorie te w wielu przypadkach się rozmiągają. Indeks Conleya jest zdefiniowany dla potoków, które nie muszą być gradientowe. Można go definiować dla potoków na dowolnej przestrzeni lokalnie zwartej, gdzie w ogólności nie ma pojęcia gradientu. Indeks Conleya nie wymaga również założeń transversalności. Nie oznacza to natomiast, że indeks Conleya jest ogólniejszy od kohomologii Morse’a. Nie ma na przykład żadnego uogólnienia indeksu Conleya na przypadek rozmaitości Hilberta, gdy funkcjonały są silnie nieokreślone. Istnieje natomiast w tym przypadku abstrakcyjna teoria Morse’a ([AM05]), co zostało wykorzystane w [H1] i [H2].

Gdy w danym problemie obydwie teorie są dostępne, indeks Conleya jest zazwyczaj mniej wymagający technicznie. Praca [H4] poświęcona jest warunkowi, przy którym możemy liczyć indeks Conleya w nieskończoności.

Indeks Conleya przyporządkowujemy otoczeniom izolującym lub równoważnie izolowanym zbiorom niezmienniczym. Domknięty i ograniczony zbiór Ω jest otoczeniem izolującym dla potoku jeżeli część niezmiennicza $\text{inv } \Omega$ jest zawarta we wnętrzu $\text{Int } \Omega$. Często nieoczywistym problemem jest sprawdzenie, czy dany zbiór jest

otoczeniem izolującym. W pracy [H4] przedstawiony został abstrakcyjny warunek, przy którym dostatecznie duża kula $B \subset \mathbb{R}^n$ jest otoczeniem izolującym. Jako konsekwencje podany został następujący fakt:

Stwierdzenie 1. *Istnieją dwa właściwe pola gradientowe na $\mathbb{R}^n$ ($n > 1$), które są homotopijne w klasie pól właściwych, a nie są homotopijne w klasie pól właściwych gradientowych.*

Warto wspomnieć, że w [Pa] A. Parusiński otrzymał wynik mówiący, że dowolne dwa pola gradientowe na kuli (nieznikające na sferze) są homotopijne w klasie pól gradientowych wtedy i tylko wtedy gdy są homotopijne - czyli wtedy i tylko wtedy gdy mają ten sam stopień. Choć klasy homotopii właściwych pól na $\mathbb{R}^n$ również są wyznaczone przez stopień, okazuje się, że już klasy homotopii gradientowych są czulsze.

Istotny jest fakt, że metoda użyta w pracy [H4] uogólnia się do przypadku nieskończenie wymiarowego, to jest dla pól pseudogradientowych na przestrzeniach Banacha. W szczególności, metoda ta została wykorzystana w pracach [H5], [H6] jak i w pracach [Pub4], [Pub7].

W pracach [H5] i [H6] zastosowaliśmy indeks Conleya do otrzymania hipotezy Arnolda na $\mathbb{C}P^n$ oraz, przy pewnych dodatkowych warunkach na Hamiltonian, na $T^{2n} \times \mathbb{C}P^m$.

Jeżeli H jest odpowiednio małym w normie C^2 Hamiltonianem zależnym od czasu na zamkniętej rozmaitości symplektycznej (M, ω) to równania Hamiltona mają co najmniej $\text{Crit}(M)$ rozwiązań 1-periodycznych, gdzie

$$\text{Crit}(M) = \min_{f \in C^1} \# \text{Crit}(f)$$

oznacza minimalną ilość punktów krytycznych, którą gładka funkcja na M musi mieć. Ta obserwacja wraz z faktem, że dla dowolnego Hamiltonianu na torusie T^2 są co najmniej 3 rozwiązania 1-periodyczne, zainspirowała V. I. Arnolda do postawienia w latach 60-tych hipotezy, że $\text{Crit}(M)$ stanowi dolne ograniczenie liczby orbit 1-periodycznych dla dowolnego Hamiltonianu na dowolnej zamkniętej rozmaitości symplektycznej (początkowo hipoteza została sformułowana dla $2n$ -wymiarowego torusa T^{2n}). Hipoteza została udowodniona w pewnych szczególnych przypadkach:

- dla powierzchni przez Y. Eliashberg ([E]) i przez A. Floera ([F]),
- dla torusa T^{2n} przez Ch. Conleya i E. Zehndera ([CZ]),
- dla zespolonej przestrzeni rzutowej $\mathbb{C}P^n$ przez G. Fortune i A. Weinsteina ([Fo]),
- dla rozmaitości asferycznych przez J. Oprea'e i Yu. Rudyaka ([RO]).

Pytanie o minimalną liczbę orbit 1-periodycznych jest jednak wciąż otwarte dla dużej klasy rozmaitości. W szczególności, hipoteza jest otwarta dla $T^{2n} \times \mathbb{C}P^m$. W 1990 roku Y.-G Oh ([O]) udowodnił, że istnieje w tym przypadku co najmniej $m + 1$ orbit 1-periodycznych. Uzyskany wynik jest daleki od tego co postulował V. I. Arnold. Opierając się na pracy [H5], w pracy [H6] pokazaliśmy, że w przypadku hamiltonianów, które są C^1 -małe, istnieje $m + n + 1$ orbit 1-periodycznych. Tym samym spełniona jest teza hipotezy Arnolda.

4.2 Szczegółowy opis wyników

4.2.1 Wstęp

Układy hamiltonowskie na $\mathbb{R}^{2n}$ - orbity periodyczne

Poniższe podejście analityczne do problemu szukania periodycznych rozwiązań równań Hamiltona zostało zaprezentowane przez Paula Rabinowitza [Rab].

Dla hamiltonianu $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcjonal działania $\mathcal{A}_H : C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowany jest wzorem

$$\mathcal{A}_H(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle -J\dot{x}(t), x(t) \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} dt - \int_0^1 H(t, x(t)) dt.$$

Przestrzeń Sobolewa $H^s(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ definiujemy jako uzupełnienie przestrzeni $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ w iloczynie skalarnym

$$\langle x, y \rangle_s = \langle x_0, y_0 \rangle + 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^{2s} \langle x_k, y_k \rangle$$

gdzie $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{k2\pi Jt} x_k$, $x_k \in \mathbb{R}^{2n}$. Okazuje się, że naturalną dziedziną funkcjonału

$\mathcal{A}_H$ jest przestrzeń $H^{\frac{1}{2}}$. Aby się o tym przekonać wprowadźmy oznaczenia (patrz [HZ])

$$a(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle -J\dot{x}(t), x(t) \rangle dt; \quad b(x) = \int_0^1 H(t, x(t)) dt$$

Wówczas

$$a(x) = \|P^+ x\|_{\frac{1}{2}}^2 - \|P^- x\|_{\frac{1}{2}}^2$$

gdzie $P^\pm x = \sum_{\pm k \in \mathbb{N}} e^{k2\pi Jt} x_k$. Oznaczmy $L_s x = \nabla_s a(x)$. Wtedy $L_s : H^s \rightarrow H^s$ jest

- nieograniczony dla $s < \frac{1}{2}$,
- ograniczonym operatorem Fredholma dla $s = \frac{1}{2}$,
- zwarty dla $s > \frac{1}{2}$.

Gradient funkcji b jest z kolei (przy kwadratowych warunkach wzrostu H) ciągły w $H^0 = L^2$. Odwzorowania sprzężone j_s^* do włożeń $j_s : H^s \rightarrow L^2$ są dla $s > 0$ zwarte co gwarantuje, że gradient $\nabla_s b = j_s^* \nabla_0 b$ jest zwarty. Dla $s = \frac{1}{2}$ otrzymujemy więc, że odwzorowanie $F(x) = \nabla \mathcal{A}_H(x) = Lx + K(x)$ jest zwartym zaburzeniem odwzorowania Fredholma. W tym przypadku znanych jest wiele metod poszukiwania punktów krytycznych (między innymi stopień Leray-Schaudera czy indeks Conleya).

Układy hamiltonowskie na rozmaitości symplektycznej - problem z $H^{\frac{1}{2}}$

Mimo ogromnej popularności powyższego podejścia analitycznego to ma ono również pewne ograniczenia. Problem pojawia się, gdy chcemy zdefiniować przestrzeń $H^s(S^1, M)$ gdzie M jest rozmaitością. Jedną z możliwości jest zanurzenie M w $\mathbb{R}^N$ dla N dostatecznie dużego i zdefiniowanie $H^s(S^1, M)$ jako podzbiór takich pętli x z $H^s(S^1, \mathbb{R}^N)$, że $x(t) \in M$ dla każdego t . Niestety tak zdefiniowany $H^s(S^1, M)$ ma naturalną strukturę rozmaitości Hilberta jedynie w przypadku gdy $s > \frac{1}{2}$. Wynika to z faktu, że $H^s(S^1, \mathbb{R}^N)$ dla $s > \frac{1}{2}$ zawiera wyłącznie funkcje ciągłe, natomiast w $H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^N)$ są również funkcje nieciągłe. Jedną z możliwości obejścia tego problemu została zaproponowana przez A. Floera. Polega ona na rozpatrywaniu L^2 -gradientu i interpretowaniu orbit łączących punkty krytyczne jako krzywe J -holomorficzne. Podejście to stało się niesamowicie popularne i pozwoliło między innymi na udowodnienie tzw. homologicznej hipotezy Arnolda (prace Floer, Piunikhin-Salamon-Schwarz, Liu-Tian, Ruan, Fukaya-Ono).

Dla niektórych rozmaitości da się jednak korzystać do pewnego stopnia z oryginalnego podejścia Rabinowitza. Wówczas potok istnieje i można stosować metody teorii Morse'a czy indeksu Conleya. Prace [H1], [H5], [H6], [H2] traktują o takich przypadkach.

Hipoteza Arnolda i hipoteza Weinsteina

W latach 60-tych XX wieku V. I. Arnold postawił pytanie, które pozostało bez pełnej odpowiedzi do dzisiaj. Został on zainspirowany dwoma obserwacjami:

- dla dowolnego Hamiltonianu na torusie T^2 istnieją co najmniej 3 rozwiązania 1-periodyczne,
- dla małego w normie C^2 Hamiltonianu na dowolnej zamkniętej rozmaitości symplektycznej istnieje co najmniej $\text{Crit}(M)$ rozwiązań 1-periodycznych,

gdzie $\text{Crit}(M) = \min_{f \in C^\infty} \#\text{Crit}(f)$. W pierwotnej wersji hipoteza Arnolda brzmiała:

- dla dowolnego Hamiltonianu na $2n$ -wymiarowym torusie T^{2n} istnieje co najmniej $2n + 1 (= \text{Crit}(T^{2n}))$ rozwiązań 1-periodycznych.

Niedługo później zyskała już uogólnioną postać:

- dla dowolnej zamkniętej rozmaitości symplektycznej ilość rozwiązań 1-periodycznych jest ograniczona z dołu przez $\text{Crit}(M)$.

Hipoteza ta pozostaje wciąż otwarta dla takich rozmaitości jak na przykład $T^{2n} \times \mathbb{C}P^m$ czy $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$.

Warto zaznaczyć, że po przełomowych pracach Floera badania poszły w innym kierunku. Pytanie zostało przeformułowane do pytania o minimalną liczbę rozwiązań 1-periodycznych przy założeniu, że wszystkie rozwiązania są **niezdegenerowane**. Wówczas dolne ograniczenie jest równe sumie liczb Bettiego danej rozmaitości.

Hipoteza Weinsteina została sformułowana w 1979 roku ([W]). Dotyczy ona istnienia rozwiązań periodycznych (bez ustalonego okresu) na danych powierzchniach o stałej energii. Hipoteza ta w swojej pełnej ogólności jest nadal otwarta. H. Hofer i C. Viterbo udowodnili hipotezę Weinsteina dla pewnej szczególnej klasy powierzchni w wiązkach kostycznych ([HV]). Co ciekawe, wersja dla 3-wymiarowych rozmaitości została udowodniona przez C. H. Taubesa ([Ta]) przy użyciu teorii Seiberga-Wittena.

W pracach [H5] zajmujemy się hipotezą Arnolda na $\mathbb{C}P^n$ aby odzyskać znany wynik ([Fo]) innymi metodami, to jest korzystając z indeksu Conleya. Budując na technikach przedstawionych w [H5], w pracy [H6] dowodzimy nowy wynik dotyczący hipotezy Arnolda na $T^{2n} \times \mathbb{C}P^m$.

W pracy [H1] dzięki wprowadzonemu przez nas nowemu podejściu analitycznemu przedstawiamy skrócony dowód wyniku podanego przez Hofera i Viterbo.

Indeks Conleya i struktura modułu

Indeks Conleya wprowadzony przez Charles Conleya ([Con]) początkowo nazywany był przez niego **zdegenerowanym** indeksem Morse’a. Rzeczywiście, indeks Conleya można zdefiniować dla izolowanych punktów krytycznych. W przypadku gdy punkt krytyczny jest niezdegenerowany, indeks Conleya jest typem homotopii sfery λ_p -wymiarowej, gdzie λ_p jest indeksem Morse’a punktu krytycznego p . Chociaż indeks Conleya jest zdefiniowany w dużo większej ogólności tj. dla potoków niegradientowych na lokalnie zwartej przestrzeni topologicznej, ograniczmy się na chwilę do przypadku potoku gradientowego η na $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że domknięty i ograniczony zbiór Ω jest otoczeniem izolującym jeżeli

$$\text{inv}(\Omega, \eta) \subset \text{int}\Omega.$$

Zbiór niezmienniczy S nazywamy izolowanym zbiorem niezmienniczym jeżeli $S = \text{inv } \Omega$ dla pewnego otoczenia izolującego Ω . Mając dane otoczenie izolujące możemy zdefiniować parę indeksową jako parę domkniętych zbiorów (N, L) ($L \subset N \subset \Omega$) spełniającą:

1. $\overline{N \setminus L}$ jest otoczeniem izolującym, tzn. $\text{inv } \Omega \subset \text{int} \overline{N \setminus L}$;
2. L jest dodatnio niezmienniczy względem N , tzn. jeżeli $x \in L$ i $\eta(x, [0, t]) \subset N$ to $\eta(x, [0, t]) \subset L$;
3. L jest zbiorem wyjścia, tzn. jeżeli $x \in N$ i $\eta(x, t) \notin N$ to istnieje $t' \in [0, t]$ takie, że $\eta(x, t') \in L$.

Indeks Conleya dla zbioru niezmienniczego S lub równoważnie dla otoczenia izolującego Ω jest **typem homotopii przestrzeni ilorazowej** z wyróżnionym punktem $[N/L, [L]]$. W zastosowaniach najczęściej wystarczy nieco słabszy niezmiennik, czyli kohomologiczny indeks Conleya - kohomologie pary indeksowej $H^*(N, L)$. Okazuje się, że indeks Conleya nie zależy od wyboru pary indeksowej. Jako niezmiennik topologiczny spełnia również własności analogicznej do stopnia, tj. nietrywialność i homotopijną niezmienniczość (nazywaną w teorii indeksu Conleya kontynuacją):

Nietrywialność: jeżeli $[N/L, [L]] \neq [pt, pt]$ to $\text{inv } \Omega \neq \emptyset$

Kontynuacja: Jeżeli η_s , $s \in [0, 1]$ jest ciągłą rodziną potoków taką, że Ω jest otoczeniem izolującym dla η_s , dla każdego $s \in [0, 1]$, to indeksy Conleya dla η_0 i η_1 są równe.

W szczególności dla potoków gradientowych nietrywialność indeksu Conleya indukuje istnienie punktu krytycznego. Aby uzyskać wyniki dotyczące krotności punktów krytycznych można skorzystać ze struktury modułu dla indeksu Conleya. Dla otoczenia izolującego Ω i pary indeksowej (N, L) definiujemy ([DzGU]) relatywny cup-length $\Upsilon(\Omega, \eta)$ jako:

- 0 jeśli $H^*(N, L) = 0$
- 1 jeśli $H^*(N, L) \neq 0$ ale

$$\beta \cup \alpha = 0$$

dla każdego $\alpha \in H^*(N, L)$ i $\beta \in H^{>0}(\Omega)$

- $k \geq 2$ jeżeli istnieją $\alpha \in H^*(N, L)$ i $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ takie, że

$$\beta_1 \cup \dots \cup \beta_{k-1} \cup \alpha \neq 0$$

i dla dowolnych $\alpha' \in H^*(N, L)$ i $\beta'_1, \dots, \beta'_k$

$$\beta'_1 \cup \dots \cup \beta'_k \cup \alpha' = 0$$

Aby uzasadnić dlaczego używamy relatywnego cup-lengthu, a nie cup-lengthu pary indeksowej rozważmy następujący przykład ([Pub7]). Na zespolonej przestrzeni rzutowej $\mathbb{C}P^n$ rozważmy gładką funkcję $f : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{R}$ i funkcję $g : \mathbb{C}P^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem

$$g(x, y) := f(x) + y^2.$$

Wówczas indeks Conleya (maksymalnego ograniczonego zbioru niezmienniczego) dla potoku generowanego przez ∇g i $-\nabla g$ jest typem homotopii $\mathbb{C}P^n$ i zawieszenia $\Sigma\mathbb{C}P^n$, odpowiednio. Korzystając z (nierelatywnego) cup-lengthu indeksu Conleya uzyskalibyśmy oszacowania na minimalną ilość punktów krytycznych przez $n + 1$ w przypadku ∇g i 1 w przypadku $-\nabla g$. Innymi słowy, struktura mnożenia po zawieszeniu jest zawsze trywialna. Tej przypadłości nie ma relatywny cup-length - zarówno w pierwszym jak i w drugim przypadku relatywny cup-length jest równy $(n + 1)$.

Podobnie, jak w przypadku cup-lengthu na zamkniętej rozmaitości, mamy następujące twierdzenie ([DzGU, Tw 4.1]).

Twierdzenie 1. *Niech Ω będzie otoczeniem izolującym dla potoku gradientowego generowanego przez ∇f . Wtedy relatywny cup-length ogranicza z dołu ilość punktów krytycznych funkcji f tj.*

$$\text{Crit}(f) \geq \Upsilon(\Omega).$$

Powyższe twierdzenie stosujemy w pracach [H5] i [H6] do szacowania ilości 1-okresowych rozwiązań równań Hamiltona.

Kompleks Morse'a-Smale'a

Niech M będzie zamkniętą rozmaitością. Mówimy, że funkcja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją Morse'a-Smale'a jeżeli

- f jest funkcją Morse'a, tj. wszystkie punkty krytyczne funkcji f są niezdegenerowane;
- dla dowolnych punktów krytycznych $x, y \in \text{Crit}(f)$ rozmaitości stabilne i niestabilne x i y przecinają się transversalnie.

Uwaga 1. W zastosowaniach potrzebujemy zazwyczaj słabszego warunku, tzn. transwersalnego przecięcia rozmaitości stabilnych i niestabilnych dla punktów krytycznych, których różnica indeksów Morse'a jest nie większa od pewnej ustalonej liczby k . Przy podejściu analitycznym zaprezentowanym w pracach [H1] i [H2] nie można w ogólności poprzez zaburzenie otrzymać funkcji Morse'a-Smale'a, ale dla dowolnego k można otrzymać funkcję, która jest Morse'a-Smale'a do rzędu k .

Generatorami w kompleksie Morse’a-Smale’a są punkty krytyczne, a operator brze-
gu zdefiniowany jest poprzez zliczanie orbit łączących punkty krytyczne o różnicy
indeksów Morse’a równej 1. Kohomologie kompleksu Morse’a-Smale’a są izomor-
ficzne z kohomologiami singularnymi rozmaitości M ([Sa]) i w szczególności nie
zależą od wyboru funkcji f . Inaczej jest w przypadku funkcji Morse’a-Smale’a
na $\mathbb{R}^n$. Wówczas możemy liczyć kohomologie dla izolowanych zbiorów niezmien-
niczych. Kohomologie te są izomorficzne z kohomologiami indeksu Conleya dla
danego otoczenia izolującego.

Zarówno indeks Conleya jak i kohomologie Morse’a mają swoje nieskończenie
wymiarowe uogólnienia. Na przykład dla funkcji na przestrzeni Hilberta, której
gradient ∇f jest postaci $L + K$, gdzie L jest Fredholma, a K pełnociągły, oby-
dwie teorie dają te same wyniki (izomorfizm na poziomie kohomologii, [Pub1]). Są
jednak przypadki, w których tylko jedna (bądź żadna) z tych teorii nie jest dostęp-
na. I tak w pracy [H2] pokazujemy, że kompleks Morse’a-Smale’a dla funkcyjonału
działania na pewnej wiązce Hilberta jest dobrze zdefiniowany. Nie ma natomiast
żadnej abstrakcyjnej teorii indeksu Conleya, która by obejmowała funkcyjonały sil-
nie nieokreślone na rozmaitościach Hilberta.

Warto zaznaczyć, że wspomniana struktura modułu i relatywny cup-length mają
swoje odpowiedniki w terminach kompleksu Morse’a-Smale’a i zostały zdefiniowa-
ne w [Pub7].

4.3 Praca [H1]

Niech (W, ω) będzie rozmaitością symplektyczną i niech $H : \mathbb{R} \times W \rightarrow \mathbb{R}$ będzie
Hamiltonianem zależnym od czasu. Dla ściąganej pętli $x : S^1 \rightarrow W$, hamiltonow-
ski funkcyjonał działania jest w ogólności zdefiniowany wzorem

$$\mathbb{A}_H(x) := \int_{\mathbb{D}} \bar{x}^* \omega - \int_{S^1} H(t, x(t)) dt,$$

gdzie $\bar{x} : \mathbb{D} \rightarrow W$ jest takim odwzorowaniem z dysku, że $\bar{x}(s) = x(s)$ dla $s \in S^1 = \partial \mathbb{D} \subset \mathbb{D}$ ("capping disc"). Funkcyjonał działania jest dobrze zdefiniowany, to
znaczy nie zależy od wyboru $\bar{x}$, przy założeniu, że rozmaitość jest symplektycznie
asferyczna, czyli $\pi_2(W) \cdot \omega = 0$ ([KRT]). W szczególności funkcyjonał ten jest do-
brze zdefiniowany gdy W jest przestrzenią totalną wiązki kostycznej zamkniętej
rozmaitości, $W = T^*M$. Zanurzając M w odpowiednio dużym $\mathbb{R}^N$ możemy rozpa-
trywać pętle z $H^s(S^1, \mathbb{R}^N)$, które przyjmują wartości w M . Gdy $s > \frac{1}{2}$, przestrzeń
 $H^s(S^1, M)$ ma strukturę rozmaitości Hilberta. Dla ustalonej pętli $x \in H^s(S^1, M)$,
przestrzeń przekrojów wiązki x^*TM uzupełniamy w normie H^{1-s} . Uzupełnienie
to jest zdefiniowane na przykład poprzez wybór struktury riemannowskiej na M
i odpowiadającej jej koneksji Levi-Civita, ale w ostateczności uzupełnienie jest

niezależne od tego wyboru. Zauważmy, że z powodu struktury liniowej przestrzeni przekrojów wiązki nie musimy się już martwić o to, aby pętle były ciągłe i możemy uzupełnić tę przestrzeń w dowolnej normie Sobolewa. W rezultacie otrzymujemy wiązkę Hilberta $\mathcal{M}^{1-s}$ nad rozmaitością Hilberta $H^s(S^1, M)$, czyli zarówno typowe włókno jak i przestrzeń bazowa są nieskończenie wymiarowe. Główne twierdzenie z pracy [H1] mówi, że przy tak zdefiniowanym podejściu analitycznym, funkcjonal $\mathbb{A}_H$ ma dobre własności analityczne i w szczególności spełnia warunek Palais-Smale’a. Przypomnijmy, że warunek Palais-Smale’a jest niezbędny do pokazania, że kompleks Morse’a-Smale’a definiuje kohomologie, w szczególności warunek (PS) jest potrzebny aby pokazać, że $\partial^2 = 0$. Warunek (PS) jest również kluczowy w teorii punktów krytycznych, na przykład w lemacie o deformacji czy twierdzeniu o przełęczy górskiej ([Rab]).

Twierdzenie 2 (H1). *Niech M będzie zamkniętą rozmaitością i niech $H : S^1 \times T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie gładkim Hamiltonianem spełniającym warunki wzrostu*

$$H(t, q, p) = \frac{1}{2}|p|_q^2 + c,$$

*dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$ i każdego $(q, p) \in T^*M \setminus K$, gdzie $K \subset T^*M$ jest zbiorem zwartym. Wówczas dla każdego $s \in (\frac{1}{2}, 1)$, hamiltonowski funkcjonal działania $\mathbb{A}_H : \mathcal{M}^{1-s} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Palais-Smale’a.*

Uwaga 2. Warunek wzrostu w założeniach powyższego twierdzenia nie jest zazwyczaj restrykcyjny. Głównym zastosowaniem tej teorii jest badanie istnienia orbit periodycznych na ustalonej zwartej powierzchni o stałej energii. Wówczas interesują nas jedynie wartości Hamiltonianu na zbiorze zwartym.

Badanie funkcjonału działania na wiązce Hilberta, gdzie uzupełnienie w kierunku przestrzeni bazowej ma inną regularność niż uzupełnienie w kierunku włókna pojawiło się już w pracy Hofera i Viterbo ([HV]). Przy powyższych oznaczeniach rozważali oni funkcjonal $\mathbb{A}_H$ na przestrzeni $\mathcal{M}^0$ (tj. $s = 1$, uzupełnienie w kierunku M w normie H^1 i w normie L^2 w kierunku włókna). W tym przypadku funkcjonal **nie spełnia warunku Palais-Smale’a**. Rodziło to wiele komplikacji technicznych i autorzy w [HV] musieli przybliżać funkcjonal $\mathbb{A}_H$ ciągiem funkcjonałów o lepszych własnościach analitycznych. W dalszej części pracy [H1] odzyskujemy twierdzenia Hofera-Viterbo. Nasze podejście analityczne i fakt, że przy tym podejściu spełniony jest warunek Palais-Smale’a pozwoliły w wielu miejscach skrócić dowody.

Niech H będzie Hamiltonianem autonomicznym na T^*M , tzn. niezależnym od czasu. Wówczas, obowiązuje zasada zachowania energii, funkcja H jest stała na rozwiązaniach. Załóżmy, że powierzchnia stałej energii $\Sigma := H^{-1}(\kappa)$ jest zwarta,

spójna i regularna czyli pole hamiltonowskie X_H nie znika na Σ . Wówczas dynamika na Σ nie zależy od Hamiltonianu - dla dwóch różnych Hamiltonianów dających tę samą powierzchnię stałej energii Σ odpowiednie potoki na Σ różnią się jedynie o reparametryzację czasu. Otrzymujemy więc foliację charakterystyczną na Σ , której liśćmi są nieparametryzowane trajektorie Hamiltona). W szczególności, szukanie orbit periodycznych o energii κ jest równoważne szukaniu zamkniętych liści foliacji na $\Sigma = H^{-1}(\kappa)$. Oznaczmy przez $\mathbb{O}_M$ przekrój zerowy wiązki $T^*M \rightarrow M$.

Definicja 1. Mówimy, że powierzchnia $\Sigma = H^{-1}(\kappa)$ jest $\mathbb{O}_M$ -oddzielająca jeżeli ograniczona składowa spójności $T^*M \setminus \Sigma$ zawiera $\mathbb{O}_M$.

W [H1] skróciliśmy dowód poniższego twierdzenia:

Twierdzenie 3. *Niech $\Sigma \subset T^*M$ będzie zwartą spójną $\mathbb{O}_M$ -oddzielającą powierzchnią kontaktową. Wtedy istnieje zamknięty liść foliacji charakterystycznej na Σ .*

4.4 Praca [H2]

Praca [H2] jest kontynuacją pracy [H1]. Korzystając z przedstawionego w [H1] podejścia analitycznego udowodniliśmy w [H2] następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4 ([H2]). *Niech M będzie zamkniętą rozmaitością. Załóżmy, że Hamiltonian $H : S^1 \times T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładki i spełnia warunki wzrostu z Twierdzenia 2. Wówczas dla każdego $s \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ kompleks Morse'a-Smale'a o współczynnikach w $\mathbb{Z}_2$ jest dobrze zdefiniowany. Co więcej, kohomologie tego kompleksu nie zależą od wyboru Hamiltonianu i są izomorficzne z kohomologiami singularnymi przestrzeni wolnych pętli na M .*

Pierwszym problem z jakim trzeba się zmierzyć jest fakt, że indeks (jak i koindeks) Morse'a jest nieskończony, czyli problem jest silnie nieokreślony. W przypadku płaskiej przestrzeni Hilberta i gdy pole gradientowe jest zwartym zaburzeniem operatora Fredholma $\nabla f(x) = Lx + K(x)$, problem ten można rozwiązać porównując relatywny wymiar przestrzeni odpowiadającej ujemnej części spektrum z ustaloną podprzestrzenią. Mianowicie niech E_L^- , E_x^- będą podprzestrzeniami własnymi odpowiadającymi ujemnej części spektrum operatora L i Hesjanu w punkcie krytycznym x . Możemy wówczas zdefiniować relatywny indeks Morse'a jako $\dim(E_L^-, E_x^-)$ gdzie $\dim(V, W)$ zdefiniowany jest wzorem

$$\dim(V, W) := \dim(V \cap W^\perp) - \dim(V^\perp \cap W).$$

Z postaci pola wektorowego wynika, że wymiary $\dim(V \cap W^\perp)$ i $\dim(V^\perp \cap W)$ są skończone, tj. definicja jest poprawna. Relatywny indeks Morse'a zależy od wyboru L , ale już różnica relatywnych indeksów dla dwóch punktów krytycznych jest

niezależna od tego wyboru. Jeśli różnica (relatywnych) indeksów Morse’a jest równa k to tak jak w klasycznej teorii Morse’a przecięcie odpowiednich rozmaitości stabilnej i niestabilnej jest generycznie rozmaitością wymiaru k .

W przypadku funkcjonałów na rozmaitości Hilberta problem ten jest już znacznie bardziej skomplikowany ([AM04],[AM05]). Może się zdarzyć, że transwersalne przecięcie rozmaitości stabilnej i niestabilnej dla dwóch niezdegenerowanych punktów krytycznych jest niespójne, a różne składowe spójności są różnego wymiaru. Aby znaleźć przypadki, w których relatywny indeks Morse’a na rozmaitości Hilberta jest dobrze zdefiniowany wprowadzone zostało przez Abbodandolo i Majera pojęcie (0)-podwiązki istotnej. Oznaczmy przez

$$Gr(\mathbb{H}) := \{V \subset \mathbb{H} \mid V \text{ domknięta liniowa podprzestrzeń} \}$$

Grassmannian przestrzeni Hilberta $\mathbb{H}$. Powiemy, że $V \in Gr(\mathbb{H})$ jest zwartym zaburzeniem $W \in Gr(\mathbb{H})$ jeżeli operator $P_V - P_W$, gdzie P_V i P_W są odpowiednimi rzutami ortogonalnymi, jest zwarty. Wówczas relatywny wymiar $\dim(V, W)$ jest dobrze zdefiniowany. W $Gr(\mathbb{H})$ wprowadzamy relację

$$V \sim_{(0)} W \iff V \text{ jest zwartym zaburzeniem } W \text{ i } \dim(V, W) = 0$$

Wówczas (0)-istotny Grassmannian definiujemy jako przestrzeń ilorazową $Gr(\mathbb{H})/\sim$. Niech $E = T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ będzie wiązką styczną z typowym włóknem $\mathbb{H}$, gdzie $\mathbb{H}$ jest nieskończenie wymiarową ośrodkową przestrzenią Hilberta. Z twierdzenia Kuipera([K]) grupa $GL(\mathbb{H})$ jest ściągalna, a co za tym idzie wiązka E jest trywialna. Zdefiniujemy wiązki Grassmannianów:

$$Gr(E) = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} Gr(E_p) \rightarrow \mathcal{M},$$

$$Gr_{(0)}(E) = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} Gr_{(0)}(E_p) \rightarrow \mathcal{M}.$$

Przekrój wiązki $Gr(E)$ jest podwiązką E .

Definicja 2. Przekrój wiązki $Gr_{(0)}(E)$ nazywamy (0)-istotną podwiązką.

Uwaga 3. Równoważnie moglibyśmy definiować (0)-wiązki przy użyciu lokalnych trywializacji wiązki E i w rzeczywistości w pracy korzystamy w sposób istotny z obydwu definicji.

Powróćmy do problemu definiowania indeksu Morse’a dla niezdegenerowanych punktów krytycznych funkcjonału działania na $\mathcal{M}^{1-s}$. Tak jak w przypadku płaskiej przestrzeni Hilberta w przypadkach silnie nieokreślonych, indeks Morse’a liczymy jako relatywny wymiar ujemnej podprzestrzeni własnej Hesjanu w danym

punkcie E_x^- i pewnej ustalonej podprzestrzeni referencyjnej. Jako przestrzeń referencyjną w danym punkcie bierzemy reprezentanta z (0)-istotnej podwiązki. Aby można było policzyć relatywny wymiar, dla każdego punktu x przestrzeń E_x^- musi być zwartym zaburzeniem reprezentantów z włókna (0)-istotnej wiązki. Warunek $\dim(V, W) = 0$ dla dowolnych dwóch reprezentantów gwarantuje, że relatywny indeks Morse’a jest dobrze określony. W pracy [H2] konstruujemy referencyjną (0)-istotną podwiązkę tak, aby spełnione były powyższe warunki.

Uwaga 4. Naturalne wydaje się pytanie czy rzeczywiście trzeba w tym przypadku korzystać z (0)-istotnych wiązek, a nie z prawdziwych podwiązek wektorowych. Równoważnie, czy skonstruowana przez nas (0)-istotna podwiązka podnosi się do prawdziwej podwiązki. Grassmannian $Gr(\mathbb{H})$ jest przestrzenią ściągającą, więc przekrój $\mathcal{E} : \mathcal{M} \rightarrow Gr_{(0)}(\mathbb{H})$ podnosi się do przekroju $\hat{\mathcal{E}} : \mathcal{M} \rightarrow Gr(\mathbb{H})$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{E}$ jest zero-homotopijne. Abbondandolo i Majer pokazali w [AM09], że $\pi_i(Gr_{(0)}(\mathbb{H})) \simeq \pi_{i-1}(BO(\infty))$. Z periodyczności Botta, $\mathcal{E}$ jest zero-homotopijne wtedy i tylko wtedy gdy odwzorowania

$$\mathcal{E}_* : \pi_i(\mathcal{M}) \rightarrow \pi_i(Gr_{(0)}(\mathcal{H}))$$

są trywialne dla $i \equiv 1, 2, 3, 5 \pmod{8}$.

W pracy [H2] rozważamy również abstrakcyjne problemy otrzymywania transwersalności poprzez generyczne zaburzenia pola wektorowego na rozmaitości Hilberta i problem funktorialności kohomologii Morse’a. Abbondandolo i Majer w pracy ”A Morse complex for infinite dimensional manifolds—part I” ([AM05]) pokazali abstrakcyjne warunki dla silnie nieokreślonych funkcjonałów na rozmaitościach Hilberta, przy których kompleks Morse’a jest dobrze zdefiniowany. Zapowiedziana druga część pracy, mająca między innymi zawierać aspekty związane z transwersalnością i funktorialnością, nigdy nie powstała w wersji do druku. Praca [H2] stanowi pierwszy konkretny przykład, do którego zastosowano abstrakcyjną teorię z [AM05]. Co więcej, teoria została uzupełniona zarówno o twierdzenie o generycznej transwersalności ([H2, Tw.5.5]) jak i twierdzenia dotyczące funktorialności ([H2, Tw. 7.1 i Tw. 7.2]).

4.5 Praca [H3]

W pracach [H1] i [H2] pokazaliśmy przykład zastosowania abstrakcyjnej teorii Morse’a dla funkcjonałów silnie nieokreślonych na rozmaitości Hilberta. W pracy [AM04] Abbondandolo i Majer przedstawili również uogólnienie kompleksu Morse’a w innym kierunku, to jest dla funkcjonałów na przestrzeniach Banacha. W

[H3] podajemy pierwsze zastosowanie podejścia do kompleksu Morse'a w przestrzeniach Banacha zaproponowanego w [AM04]. Zastosowanie to dotyczy szacowania krotności punktów krytycznych pewnej klasy funkcjonałów zawierających tzw. funkcjonal 2p-powierzchni. Naturalną dziedziną tego funkcjonału jest przestrzeń Banacha $X := W_0^{1,p}$.

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $2p > n \geq 2$ będzie ograniczoną dziedziną z dostatecznie gładkim brzegiem. Rozważmy funkcjonal

$$f(u) := \frac{1}{2p} \int_{\Omega} (1 + |\nabla u|^2)^p dx + \int_{\Omega} G(u) dx,$$

gdzie G jest funkcją klasy C^2 spełniającą warunek wzrostu

$$|G(t)| \leq \beta |t|^\alpha + \delta$$

i $\alpha \in [0, 2p)$, $\beta, \delta \geq 0$. W pracy uzyskujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5. *Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcjonalem jak wyżej i niech wszystkie punkty krytyczne f będą niezdegenerowane, to znaczy $d^2 f(u) : X \rightarrow X^*$ jest iniekcją dla każdego punktu krytycznego u . Wówczas homologie Morse'a o współczynnikach w $\mathbb{Z}_2$ są dobrze zdefiniowane i izomorficzne z homologiami singularnymi przestrzeni X , to jest*

$$HM_k(f, \mathbb{Z}_2) \simeq H_k(X, \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{gdy } k = 0 \\ 0 & \text{gdy } k > 0. \end{cases}$$

W szczególności, otrzymujemy wniosek.

Wniosek 1. Załóżmy, że f ma dwa niezdegenerowane punkty krytyczne u_1, u_2 . Wówczas f ma kolejny (możliwe, że zdegenerowany) punkt krytyczny u_3 .

Uwaga 5. Punkty krytyczne funkcjonału f odpowiadają słabym rozwiązaniom pewnych quasi-liniowych eliptycznych równań - patrz [CV] i referencje w tej pracy.

Głównym problem z jakim musieliśmy się zmierzyć, to konstrukcja odpowiedniego pola wektorowego generującego potok. Kompleks Morse'a w [AM04] definiowany jest dla pól wektorowych F spełniających warunki

- F jest zupełne,
- f jest funkcją Lapunowa dla F ,
- F jest Morse'a, to znaczy Jakobian F w każdym punkcie krytycznym jest operatorem hiperbolicznym,

- para (f, F) spełnia warunek Palais-Smale’a,
- F jest Morse’a-Smale do rzędu 2.

Naturalnym kandydatem na pole wektorowe, które spełnia odpowiednie warunki, jest pole pseudo-gradientowe. Niestety pole pseudo-gradientowe jest zdefiniowane poza punktami krytycznymi i choć może zostać naturalnie przedłużone przez 0 w punktach krytycznych uzyskane wówczas pole jest w ogólności jedynie ciągle w punktach krytycznych - Jakobian nie jest dobrze zdefiniowany. W [CV] Autorki pokazały, że druga pochodna w punkcie krytycznym rozszerza się do ograniczonego odwzorowania z pewnej przestrzeni Hilberta w siebie. Wykorzystując ten fakt, udało nam się skonstruować gładkie pole również w otoczeniu punktów krytycznych, a co za tym idzie pole spełniające wszystkie powyższe warunki.

Uwaga 6. Założenia Twierdzenia 5 mogą być osłabione. W [H3] chcieliśmy jedynie zaprezentować, że kompleks Morse’a jest dobrze zdefiniowany w najprostszych przypadkach. W ramach kontynuacji badań z [H3] powstał wraz z S. Cingolani preprint [Pub9], w którym poszerzamy klasę funkcjonałów z dobrze zdefiniowanym kompleksem Morse’a. Wiązało się to z szeregiem technicznych komplikacji. Przy słabszych założeniach nie jest na przykład spełniony warunek Palais-Smale’a, a jedynie warunek Ceramiego.

Uwaga 7. Interesującym wydaje się pytanie, czy kompleks Morse’a jest również dobrze zdefiniowany w przypadku układu równań indukującego problem silnie nieokreślony. W tym przypadku standardowe grupy krytyczne są trywialne (choć grupy krytyczne relatywne do podprzestrzeni mogłyby już dać nietrywialne odpowiedzi [KSz], [Sz]).

4.6 Praca [H4]

Praca [H4] zawiera abstrakcyjny lemat (stwierdzenie) dotyczący istnienia maksymalnego ograniczonego zbioru niezmienniczego. W ogólności, sprawdzenie czy zbiór jest otoczeniem izolującym może być nietrywialnym problemem.

Lemat z pracy [H4] jest w kluczowy sposób wykorzystywany w pracach [H5] i [H6]. Niech η będzie potokiem na $\mathbb{R}^n$. Oznaczmy przez $B(R) \subset \mathbb{R}^n$ kulę o środku w zerze i promieniu R .

Definicja 3. Mówimy, że S jest maksymalnym ograniczonym zbiorem niezmienniczym dla potoku η jeżeli istnieje R_0 takie, że $S = \text{inv}(B(R), \eta)$ dla każdego $R > R_0$.

Przypomnijmy, że pole wektorowe $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest właściwe jeżeli przeciwobraz zbioru zwartego jest zbiorem zwartym.

Lemat 1 ([H4]). *Niech η będzie potokiem gradientowym generowanym przez ∇f . Jeżeli ∇f jest polem właściwym to istnieje maksymalny ograniczony zbiór niezmienniczy.*

Dowód powyższego lematu jest na tyle ogólny, że przepisuje się na:

- przypadek rodziny potoków ([H4, Prop. 2.4]) - dla rodziny potoków generowanych przez ciągłą rodzinę właściwych pól wektorowych $\{f_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ istnieje wspólne R takie, że maksymalny zbiór niezmienniczy $S_\lambda \subset B(R)$ dla każdego $\lambda \in [0,1]$. Oznacza to, że rodzina ta wyznacza kontynuację względem otoczenia izolującego $B(R)$. W szczególności, indeksy Conleya (lub równoważnie kohomologie Morse'a) dla izolowanych zbiorów niezmienniczych S_λ są takie same.
- przypadek przestrzeni Hilberta ([H5],[H6])
- przypadek przestrzeni Banach dla pola pseudo-gradientowego ([Pub6])

Lemat ten ma również pewne ciekawe konsekwencje niezależne od zastosowań z [H5] i [H6]. W [Pa], A. Parusiński odpowiedział twierdząco na pytanie czy dwa pola gradientowe na kuli $B \subset \mathbb{R}^n$ mające ten sam stopień są homotopijne poprzez pola gradientowe. Tym samym homotopie gradientowe nie dają czulszego niezmiennika. Analogicznie jak na kuli, dwa pola właściwe na $\mathbb{R}^n$ są homotopijne wtedy i tylko wtedy gdy mają ten sam stopień. Rozważmy funkcje $f(x,y) = x^2 + y^2$ i $g(x,y) = -f(x,y)$. Wtedy ∇f i ∇g są właściwe i $\deg \nabla f = \deg \nabla g = 1$, są więc homotopijne w kategorii pól właściwych. Nie są jednak homotopijne poprzez homotopie gradientowe. Rzeczywiście, gdyby były homotopijne poprzez gradientowe pola właściwe to indeks Conleya na początku i na końcu homotopii dla $S = \{0\}$ byłby taki sam. Otrzymujemy więc na całym $\mathbb{R}^n$ znacząco inny wynik od wyniku otrzymanego przez Parusińskiego w [Pa].

4.7 Praca [H5]

Niech (M, ω) będzie zamkniętą symplektyczną rozmaitością i niech $H : S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie gładkim Hamiltonianem zależnym od czasu. Potok hamiltonowski ϕ_t zdefiniowany jest poprzez

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_t = X_H(\phi_t), \\ \phi_0 = id, \end{cases}$$

gdzie zależne od czasu pole hamiltonowskie X_H spełnia

$$\omega(X_H, \cdot) = -dH.$$

Dyfeomorfizm $\phi : M \rightarrow M$ nazywamy dyfeomorfizmem hamiltonowskim, jeżeli istnieje Hamiltonian $H : S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$ taki, że $\phi = \phi_1$. W szczególności, punkty stałe dyfeomorfizmu hamiltonowskiego odpowiadają orbitom 1-okresowym potoku hamiltonowskiego. Jeśli dyfeomorfizm hamiltonowski jest C^1 -bliski identyczności to punkty stałe odpowiadają punktom krytycznym pewnej funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Aby to zobaczyć zauważmy, że otoczenie przekątnej Δ w $M \times M$ jest dyfeomorficzne z otoczeniem przekroju zerowego $\mathbb{O}_M \simeq M$ w T^*M . Stąd dyfeomorfizmowi ϕ można przyporządkować przekrój wiązki kostycznej, to jest 1-formę λ_ϕ . Można pokazać, że forma λ_ϕ jest dokładna (co więcej C^1 -bliski identyczności dyfeomorfizm jest hamiltonowski wtedy i tylko wtedy gdy λ_ϕ jest dokładna). Punkty stałe ϕ odpowiadają zerom 1-formy $\lambda_\phi = df$, a więc punktom krytycznym funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Otrzymujemy więc fakt mówiący, że dla C^1 -bliskich identyczności dyfeomorfizmów hamiltonowskich liczba punktów stałych jest nie mniejsza niż minimalna liczba punktów krytycznych funkcji na M ,

$$\#\text{Fix}(\phi) \geq \text{crit}(M) := \min\{\#\text{crit}(f) : f : M \rightarrow \mathbb{R}\} \quad (1)$$

Warto zaznaczyć, że prawa strona nierówności, to znaczy liczba $\text{crit}(M)$ nie jest w ogólności znana. Wciąż otwarte jest pytanie czy $\text{crit}(M)$ jest niezmiennikiem homotopijnym, to jest czy jeżeli rozmaitości M i N są homotopijnie równoważne to z tego wynika, że $\text{crit}(M) = \text{crit}(N)$ ([KR]). Znane są jednak pewne ograniczenia. W szczególności, $\text{crit}(M)$ jest ograniczona z góry przez $\dim M + 1$ ([T]). Liczba $\text{crit}(M)$ jest nie mniejsza od kategorii Lusternika-Schnirelmana $\text{cat} M$. Kategoria jest z kolei większa od długości kohomologicznej $\text{CL}(M)$. Z tego powodu zdarza się, że hipoteza Arnolda formułowana jest w wersji

$$\#\text{Fix}(\phi) \geq \text{CL}(M) + 1.$$

Uwaga 8. Dla $2n$ -wymiarowego torusa zachodzi $2n+1 = \text{CL}(M)+1 \leq \text{crit}(T^{2n}) \leq \dim T^{2n} + 1 = 2n + 1$ więc $\text{crit}(T^{2n}) = 2n + 1$. Tak samo dla zespolonej przestrzeni rzutowej $\text{crit}(\mathbb{C}P^n)$ jest znany. Rzeczywiście, $\text{CL}(\mathbb{C}P^n) + 1 = n + 1$ i łatwo jest wskazać funkcję na $\mathbb{C}P^n$, która ma dokładnie $n + 1$ punktów krytycznych.

Hipoteza Arnolda mówi, że powyższa nierówność (1) zachodzi dla wszystkich dyfeomorfizmów hamiltonowskich, a nie tylko dla tych, które są C^1 -bliskie identyczności.

Uwaga 9. Począwszy od prac Floera olbrzymią popularność zyskała inna wersja hipotezy, mianowicie tak zwana homologiczna hipoteza Arnolda. Minimalna liczba punktów krytycznych funkcji Morse'a na M jest nie mniejsza niż suma liczb Bettię. Homologiczna hipoteza Arnolda mówi, że w przypadku gdy wszystkie punkty stałe dyfeomorfizmu hamiltonowskiego ϕ są niezdegenerowane to zachodzi

$$\#\text{Fix}(\phi) \geq \sum_i \beta_i,$$

gdzie β_i są liczbami Bettiego.

Oryginalne pytanie Arnoldda nazywane czasem zdegenerowaną hipotezą Arnoldda pozostaje wciąż otwarte nawet dla takich rozmaitości jak $\mathbb{C}P^n \times T^{2m}$. Hipoteza dla $\mathbb{C}P^n$ została udowodniona przez G. Fortune ([Fo]), a dla T^{2m} przez Ch. Conleya E. Zehndera ([CZ]). W pracy [H5] podajemy nowy dowód hipotezy Arnoldda na $\mathbb{C}P^n$. Nasz dowód opiera się na relatywnej długości kohomologicznej indeksu Conleya. W przypadku gdy mamy już dowody zarówno na $\mathbb{C}P^n$ jak i na torusie T^{2m} , w których korzystaliśmy z tego samego narzędzia - indeksu Conleya - można próbować je unifikować, aby powiedzieć coś o punktach stałych na iloczynie kartezjańskim. Udało się tego dokonać w pracy [H6].

Hamiltonian $H_0 : S^1 \times \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{R}$ podniesimy do funkcji $H_1 : S^1 \times S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ a następnie rozszerzamy kwadratowo do $H : S^1 \times \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$

$$H(t, x) = |x|^2 H\left(t, \frac{x}{|x|}\right).$$

Takie rozszerzenie powoduje, że rozwiązania równań Hamiltona dla H na $\mathbb{R}^{2n+2}$ mają stałą normę i (nietrywialne rozwiązania) rzutują się na rozwiązania równań Hamiltona dla H_0 na $\mathbb{C}P^n$. Może się jednak zdarzyć, że na $\mathbb{R}^{2n+2}$ nie ma rozwiązań 1-periodycznych. Rzeczywiście, jeżeli weźmiemy $H_0(t, x) \equiv c$ to trajektorie na $\mathbb{R}^{2n+2}$ będą się poruszały po włóknach rozwłóknienia Hopfa. Wówczas rozwiązania na $\mathbb{R}^{2n+2}$ mimo, że rzutują się na rozwiązania stałe, będą 1-periodyczne wtedy i tylko wtedy gdy $c \in \pi\mathbb{Z}$. Jednym ze sposobów, aby zobaczyć trajektorie, które nie są 1-periodyczne na $\mathbb{R}^{2n+2}$, ale rzutują się na trajektorie 1-periodyczne na $\mathbb{C}P^n$ jest obcięcie funkcjonału działania do sfery w L^2 . Okazuje się, że punkty krytyczne $\mathcal{A}_H|_S : H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n+2}) \supset S \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $S = \{x \in H^{\frac{1}{2}} \mid \|x\|_{L^2} = 1\}$ dają rozwiązania 1-periodyczne na $\mathbb{C}P^n$ ([Fo]).

W [H5] proponujemy inny sposób na znalezienie wszystkich orbit, które rzutują się na orbity periodyczne na $\mathbb{C}P^n$. Rozważmy rodzinę Hamiltonianów $H : \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$H(\lambda, t, x) = H(t, x) + \lambda\pi|x|^2.$$

Zauważmy, że $x \equiv 0$ jest rozwiązaniem dla każdego λ . Co więcej, jeżeli x jest rozwiązaniem to $c \cdot x$ również jest rozwiązaniem dla każdego $c \in \mathbb{C}$ (mnożenie przy identyfikacji $\mathbb{R}^{2n+2} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$). Możemy więc traktować λ jako parametr bifurkacji i badać bifurkacje z trywialnej gałęzi rozwiązań. Pytanie o istnienie $(n+1)$ periodycznych rozwiązań na $\mathbb{C}P^n$ jest równoważne istnieniu $(n+1)$ gałęzi bifurkacji na odcinku $(\lambda_0, \lambda_0 + 1)$. Takie spojrzenie na problem pozwoliło na zastosowanie metod teorii bifurkacji, w szczególności, na skorzystanie z relatywnej długości kohomologicznej z pracy "The Conley index, cup-length and bifurcation" ([DzGU]).

Uwaga 10. Zauważmy, że uzyskany problem bifurkacyjny jest dosyć nietypowy. Większość standardowych metod do wykrywania bifurkacji korzysta z postaci linearyzacji pola wzdłuż gałęzi trywialnych rozwiązań. W naszym przypadku pole nie jest w ogólności różniczkowalne w $x = 0$. Hamiltonian H jest jednorodny rzędu dwa, czyli pole ∇H jest jednorodne rzędu jeden i jest różniczkowalne wtedy i tylko wtedy gdy H jest formą kwadratową na $\mathbb{R}^{2n+2}$. W pracy [DzGU] Autorzy również badają linearyzację w 0. Nie mogliśmy więc wprost zastosować twierdzeń z [DzGU], a jedynie dostosować odpowiednie dowody do naszej sytuacji.

4.8 Praca [H6]

Hipoteza Arnolda dla dyfeomorfizmów hamiltonowskich na $T^{2n} \times \mathbb{C}P^m$ jest wciąż otwarta. W 1990 roku Y.-G. Oh udowodnił ([O]), że dowolny dyfeomorfizm hamiltonowski na $T^{2n} \times \mathbb{C}P^m$ ma co najmniej $m + 1$ punktów stałych. Wynik ten jest daleki od tego, co mówi hipoteza Arnolda, czyli od ograniczenia dolnego przez $2n + m + 1$. W pracy [H6] pokazujemy, że, przy pewnych założeniach na Hamiltonian, ograniczenie, które zaproponował Arnold jest prawdziwe.

Twierdzenie 6 ([H6]). *Niech H będzie Hamiltonianem na $(T^{2n} \times \mathbb{C}P^m, \omega_{std} \oplus \omega_{FS})$ spełniającym $\max\{2\|H\|_\infty, \|\nabla_{\mathbb{C}P^m} H\|_\infty\} < \frac{1}{2}$ i niech ϕ będzie dyfeomorfizmem hamiltonowskim indukowanym przez H . Wówczas*

$$Fix(\phi) \geq 2n + m + 1.$$

Uwaga 11. Przypomnijmy, że dowód hipotezy Arnolda w przypadku dyfeomorfizmów hamiltonowskich, które są C^1 -blisko identyczności jest "elementarny". W powyższym twierdzeniu wymagamy jedynie, by H było małe w normie C^1 , co implikuje, że odpowiedni dyfeomorfizm jest C^0 -blisko identyczności.

Idea dowodu powyższego twierdzenia bazuje na technikach z pracy [H5]. Po przez odpowiednie podniesienie Hamiltonianu i rozszerzenie kwadratowo otrzymujemy sprowadzamy problem do problemu szukania rozwiązań na $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2m+2}$. Analogicznie jak w [H5] wprowadzamy dodatkowy parametr λ i szukamy punktów krytycznych funkcjonału $\mathcal{A}_H : H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \times H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2m+2}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aby nie-trywialne punkty krytyczne (x_1, y_1, λ_1) i (x_2, y_2, λ_2) dawały geometrycznie różne orbity periodyczne wystarczy, aby $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$, czyli w szczególności wystarczy szukać punktów krytycznych w $X := H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \times H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2m+2}) \times (\lambda_0, \lambda_0 + 1)$ dla pewnego λ_0 . W odróżnieniu od [H5] nie możemy już dla dowolnego Hamiltonianu założyć, że zbiór niezmienniczy $\text{inv } X$ potoku gradientowego jest zawarty we wnętrzu X , czyli, że po obcięciu do dostatecznie dużej kuli w $H^{\frac{1}{2}}$ otrzymujemy otoczenie izolujące.

W [H6] pokazujemy, że przy założeniach na Hamiltonian z Twierdzenia 6, dla dostatecznie dużego R zbiór $\Omega = B_R(H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \times H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2m+2})) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ jest otoczeniem izolującym. Co więcej, jeżeli H spełnia założenia z Twierdzenia 6 to sH dla $s \in [0, 1]$ również spełnia te założenia. Oznacza to, że rodzina sH , $s \in [0, 1]$ wyznacza kontynuację potoków gradientowych odpowiadających funkcjonałom $\mathcal{A}_{sH}$ i w rezultacie, aby policzyć indeks Conleya i jego relatywny cup-length dla $\mathcal{A}_H$ wystarczy policzyć te niezmienniki dla $\mathcal{A}_0$. W przypadku Hamiltonianu zerowego otrzymujemy potok produktowy i można wprost wyznaczyć relatywny indeks Conleya (który w tym wypadku wynosi $2n + m + 1$).

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych

5.1 Publikacje przed doktoratem

- [Dr1] M. Starostka, *Seiberg-Witten invariants, the topological degree and wall crossing formula*, Central European Journal of Mathematics 10, 2129-2137 (2012)
- [Dr2] M. Starostka, *Morse cohomology in a Hilbert space via the Conley index*, Journal of Fixed Point Theory and Applications, Volume 17, 425–438, (2015)
- [Dr3] M. Starostka, *A remark on singular sets of vector bundle morphisms*, European Journal of Mathematics 1, 154-159, (2015)

5.2 Publikacje po doktoracie, które nie wchodzą w skład głównego osiągnięcia habilitacji

- [Pub1] M. Izydorek, T.O. Rot, M. Starostka, M. Styborski, R.C.A.M. Vandervorst, *Homotopy invariance of the Conley index and local Morse homology in Hilbert spaces*, Journal of Differential Equations 2017,
- [Pub2] M. Starostka, N. Waterstraat, *The E-cohomological Conley Index, Cup-Lengths and the Arnold Conjecture on T^{2n}* , Advanced Nonlinear Studies 2019

- [Pub3] J. Ciesielski, J. Maksymiuk, M. Starostka, *On a generalization of a theorem of S. Bernstein*, Fixed Point Theory and Applications 2019
- [Pub4] M. Starostka, N. Waterstraat, *On a comparison principle and the uniqueness of spectral flow*, Mathematische Nachrichten 2022
- [Pub5] M. Izydorek, J. Janczewska, M. Starostka, N. Waterstraat, *The Equivariant Spectral Flow and Bifurcation for Functionals with Symmetries – Part I*, arXiv:2306.0117 preprint
- [Pub6] M. Starostka, N. Waterstraat, *Lecture notes on the relative cup-length for the Conley index and the Arnold conjecture*, Lecture Notes in Nonlinear Analysis, CBN, to be published
- [Pub7] T.O. Rot, M. Starostka, N. Waterstraat, *The relative cup-length in local Morse cohomology*. Topological Methods in Nonlinear Analysis. Online. 21 September 2024. pp. 1 - 15. DOI 10.12775/TMNA.2024.002.
- [Pub8] J. Janczewska, M. Starostka, N. Waterstraat, *Local and Global Bifurcation for Periodic Solutions of Hamiltonian Systems via Comparison Theory for the Spectral Flow*, to be published in Topological Methods in Nonlinear Analysis
- [Pub9] L. Asselle, S. Cingolani, M. Starostka, *Morse homology for a class of elliptic partial differential equations*, arXiv:2504.19721 preprint
- [Pub10] M. Izydorek, J. Janczewska, M. Starostka, N. Waterstraat, *On the Uniqueness of the G-equivariant Spectral Flow*, preprint

5.3 Omówienie pozostałych wyników

Wśród moich współautorów najczęściej pojawiają się: Prof. Nils Waterstraat i j.Prof. Luca Asselle. Z Nilsem Waterstraatem rozpocząłem współpracę jeszcze przed doktoratem (praca [Dr1], 2015). W okresie 10.2021-9.2023 pracowałem na Uniwersytecie w Halle realizując wraz z Nilsem Waterstratem projekt dotyczący niezmienniczego potoku spektralnego (finansowany przez DFG). Wówczas nasza współpraca się zintensyfikowała (prace [Pub4],[Pub5],[Pub6],[Pub7],[Pub9]), z czego prace [Pub4],[Pub5],[Pub7],[Pub9] dotyczą teorii potoku spektralnego i nie są związane tematycznie ze wskazanym osiągnięciem habilitacyjnym.

Współpraca z Lucą Asselle rozpoczęła się podczas mojego dwuletniego stażu po-doktorskiego (4.2018-3.2020) na Uniwersytecie w Bochum, gdy razem pracowaliśmy w projekcie "Morse theoretical methods in Hamiltonian dynamics" (staż

finansowany przez DFG). Wyniki tej współpracy przedstawiam w osiągnięciu habilitacyjnym (wyjątek stanowi napisana samodzielnie praca [H4]). Wraz z Luca Asselle otrzymaliśmy finansowanie od NCN i DFG na następny projekt (rozwiniecie badań przedstawionych w osiągnięciu habilitacyjnym) i nasza współpraca jest kontynuowana ([Pub8]).

Poniżej zamieszczam krótki opis prac [Pub1]-[Pub9].

5.3.1 M. Izydorek, T.O. Rot, M. Starostka, M.Styborski, R.C.A.M Vandervorst, *Homotopy invariance of the Conley index and local Morse homology in Hilbert spaces*, Journal of Differential Equations 2017,

Niech f będzie takim funkcjonałem na ośrodkowej przestrzeni Hilberta, że jego gradient jest postaci $L + K$, gdzie L jest Fredholma, a K jest zwarty. W pracy dowodzimy, że E -kohomologiczny indeks Conleya jest izomorficzny z kohomologiami Morse’a. Jest to uogólnienie znanego wyniku (D. Salamon, [Sa]) na przypadek przestrzeni Hilberta.

5.3.2 M. Starostka, N. Waterstraat, *The E -cohomological Conley Index, Cup-Lengths and the Arnold Conjecture on T^{2n}* , Advanced Nonlinear Studies 2019

W pracy uogólniamy pojęcie relatywnego cup-lengthu z klasycznego indeksu Conleya ([DzGU]) na E -kohomologiczny indeks Conleya. Następnie jako zastosowanie podajemy nowy dowód hipotezy Arnolda na $2n$ -wymiarowym torusie.

5.3.3 J. Ciesielski, J. Maksymiuk, M. Starostka, *On a generalization of a theorem of S. Bernstein*, Fixed Point Theory and Applications 2019

Korzystając z homotopijnej niezmienniczości stopnia Leray-Schaudera pokazujemy istnienie rozwiązania równania

$$\frac{d}{dt}\Phi'(u) = f(t, u, \dot{u}), \quad t \in [0, 1],$$

przy pewnych standardowych założeniach na Φ' i f (warunki wzrostu) i przy założeniu, że u spełnia warunki brzegowe Dirichleta lub Sturm-Liouville’a. W szczególności dla odpowiedniego Φ lewa strona równania może być p-laplasjanem. Jest to pierwsza moja praca, w której pojawia się p-laplasjan (później pojawia się w pracach [H3] i [Pub8]).

5.3.4 M. Starostka, N. Waterstraat *On a comparison principle and the uniqueness of spectral flow*, Mathematische Nachrichten 2022

Zasada porównywania dla dwóch dróg T_λ, S_λ samosprężonych operatorów Fredholma mówi, że jeżeli $T_0 \geq S_0$ (tzn. $T_0 - S_0$ jest nieujemnie określony) i $T_1 \leq S_1$ to

$$sf(T_\lambda) \leq sf(S_\lambda),$$

gdzie sf oznacza potok spektralny, czyli zmianę spektrum z ujemnego na dodatnie liczone ze znakiem. Badania nad potokiem spektralnym mają swoje początki w pracach M.F. Atiyaha, V.K. Patodiego i I.M. Singera w latach siedemdziesiątych ([APS]). Sama zasada porównywania ta była udowodniona przez J. Pejsachowicza i N. Waterstraata w 2013 roku ([PW]).

W pracy podany został krótki dowód zasady porównywania w przypadku dróg, dla których jedna z dróg różni się od drugiej o zwarte zaburzenie. Jako zastosowanie pokazujemy istnienie nietrywialnych rozwiązań dla układów hamiltonowskich. Co więcej, podajemy charakteryzację potoku spektralnego, która nie wymaga, aby odwzorowania na końcach drogi były odwracalne. Założenie to było istotne w charakteryzacji aksjomatycznej zaproponowanej wcześniej przez E. Cirizę, P. M. Fitzpatricka i J. Pejsachowicza.

5.3.5 M. Izydorek, J. Janczewska, M. Starostka, N. Waterstraat, *The Equivariant Spectral Flow and Bifurcation for Functionals with Symmetries – Part I*, preprint

W pracy badamy bifurkacje punktów krytycznych dla rodziny funkcyjów niezmienniczych ze względu na ortogonalne działanie zwartej grupy Liego. W szczególności pokazujemy, że nietrywialność współzmienniczego potoku spektralnego (zdefiniowanego w [IJW]) indukuje istnienie punktu bifurkacji. Jako zastosowanie podajemy szereg przykładów, w których zwykły potok spektralny jest równy zero i przez to nie gwarantuje istnienia punktów bifurkacji, ale współzmienniczy potok spektralny jest nietrywialny.

5.3.6 M. Starostka, N. Waterstaat, *Lecture notes on the relative cup-length for the Conley index and the Arnold conjecture*, Lecture Notes in Nonlinear Analysis, CBN, to be published

Są to notatki z serii pięciu wykładów, które wygłosiłem podczas Zimowej Szkoły "Geometric and Topological Methods in Dynamics of PDEs" w lutym 2023 roku na Uniwersytecie im. Mikołaja Kopernika w Toruniu. W notatkach przedstawione są równolegle teoria Morse'a jak i teoria indeksu Conleya w stopniu, który pozawala zrozumieć dowód hipotezy Arnolda na torusie T^{2m} jak i na przestrzeni rzutowej

$\mathbb{C}P^n$.

Notatki zawierają również dowody i uwagi, które nie były wcześniej opublikowane. W szczególności dowody faktów, że relatywny cup-length zarówno dla kohomologii Morse’a jak i dla indeksu Conleya szacują z dołu ilość punktów krytycznych są nowe. Dowody te są inne od tych przedstawionych oryginalnie odpowiednio w [Pub7] i [DzGU] i są zunifikowane, to znaczy podana argumentacja działa zarówno dla kohomologii Morse’a jak i indeksu Conleya. Dodatkowo, dowód istnienia maksymalnego ograniczonego zbioru niezmienniczego pojawia się w większej ogólności niż w [H4], to jest dla potoku generowanych przez pseudogradient w przestrzeni Banacha.

5.3.7 T.O. Rot, M. Starostka, N. Waterstraat, *The relative cup-length in local Morse cohomology*. Topological Methods in Nonlinear Analysis. Online. 21 September 2024. pp. 1 - 15.

Dla funkcji Morse’a-Smale’a $f : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniujemy $g : \mathbb{C}P^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $g(x, y) = f(x) - y^2$. Wówczas g jest również funkcją Morse’a-Smale’a. Jeżeli x jest punktem krytycznym funkcji f o indeksie Morse’a m to $(x, 0)$ jest punktem krytycznym g o indeksie $m - 1$. Z tego powodu kohomologie Morse’a $H_{Morse}^*(g) \simeq H_{Morse}^{*-1}(f) \simeq H^{*-1}(\mathbb{C}P^n)$. W szczególności $H_{Morse}^k(g)$ jest niezerowe tylko dla nieparzystych k i w konsekwencji odwzorowanie $H_{Morse}^k(g) \times H_{Morse}^l(g) \rightarrow H^{k+l}(g)$ jest trywialne. Z tego powodu cup-length dla kohomologii Morse’a nie daje optymalnego ograniczenia na ilość punktów krytycznych. W pracy definiujemy relatywny cup-length dla kohomologii Morse’a w ten sposób, że relatywny cup-length zarówno dla kohomologii Morse’a $H_{Morse}^*(f)$ i $H_{Morse}^*(g)$ jest taki sam i równy $n + 1$. Następnie dowodzimy twierdzenie, że relatywny cup-length daje dolne ograniczenie na ilość punktów krytycznych w przypadku zdegenerowanym. Dowód podany w pracy jest oparty na metodach stosowanych w teorii Floer’a ([AH]) co daje nadzieje, że można przenieść wynik również na przypadek nieskończenie wymiarowy, w którym indeks Conleya nie jest dobrze zdefiniowany.

5.3.8 J. Janczewska, M. Starostka, N. Waterstraat, *Local and Global Bifurcation for Periodic Solutions of Hamiltonian Systems via Comparison Theory for the Spectral Flow*, preprint

Korzystając z zasady porównywania ([Pub4]) dowodzimy istnienie punktu globalnej bifurkacji dla układów hamiltonowskich. Sama nietrywialność potoku gwarantuje istnienie jedynie lokalnej bifurkacji. W [FP], P. M. Fitzpatrick i J. Pejsachowicz zdefiniowali parzystość dla dróg odwzorowań Fredholma indeksu zero. W pracy pokazujemy związek między potokiem spektralnym a parzystością (nieparzysty potok spektralny daje nietrywialną parzystość). Jest to obserwacja, która jest znana

ekspertom, ale zgodnie z naszą wiedzą, nie była nigdzie wcześniej opublikowana. W pracy podajemy przykład jak z zasady porównywania można wywnioskować nieparzystość potoku spektralnego, a co za tym idzie nietrywialność parzystości. Nietrywialność parzystości indukuje natomiast istnienie punktu globalnej bifurkacji.

5.3.9 L. Asselle, S. Cingolani, M. Starostka, *Morse homology for a class of elliptic partial differential equations*, preprint

Praca stanowi kontynuację rozważań rozpoczętych w pracy [H3]. Znacząco rozszerzamy klasę funkcjonałów, dla których kompleks Morse'a jest dobrze zdefiniowany. W szczególności nie zakładamy warunku Ambrosetti-Rabinowitza co powoduje, że funkcjonał nie spełnia w ogólności warunku Palais-Smale'a a jedynie słabszy warunek Ceramiego. Jest to pierwsze zastosowanie kompleksu Morse'a do takich funkcjonałów.

5.4 Granty

- *Morse theoretical methods in Analysis, Dynamics, and Geometry*, 2024-, WE-AVE UNISONO, NCN i DFG (agencja wiodąca),
rola: **kierownik i główny wykonawca**
- *The equivariant spectral flow and bifurcation for indefinite functionals with symmetries*, 2021-2023, Deutsche Forschungsgemeinschaft,
rola: współwykonawca, Post-Dok
- *Morse theoretical methods in Hamiltonian dynamics*, 04.2018-03.2020, NCN i DFG,
rola: współwykonawca, Post-Dok
- *Infinite dimensional Conley index and its applications to Hamiltonian systems and Seiberg-Witten equations*, 2016-2018; Preludium, NCN,
rola: **kierownik i główny wykonawca**
- *Morse theoretical methods in Hamiltonian dynamics*, 2016-2018, Projektbezogener Personenaustausch, DAAD and MNiSW; rola: współwykonawca

5.5 Wybrane proszone odczyty

- 17.12.2024 - *Conley index and its relative cup-length*, Geometry Seminar, Research Station Geometry + Dynamics, Heidelberg

- 13-15.02.2023 - *Applications of Conley index theory*, seria 5 wykładów, Schauder Winter School on Geometric and Topological Methods in Dynamics of PDEs, Toruń, Poland
- 24.4.2018 - *A one-dimensional toy model for Seiberg-Witten theory*, Oberseminar dynamical systems, Bochum
- 8.02.2018 - *E-cohomological Conley index*, Topology Seminar, **Princeton University**
- 4.12.2013 - *Floer theory in a Hilbert space via the Conley Index*, Geometrie-Topologie Seminar - Bielefeld

5.6 Wybrane odczyty na konferencjach

- 25.06.2024 - *Morse homology for class of functionals involving 2p-area functional*, XIII Forum of Partial Differential Equations, Będlewo Conference Center
- 2.06.2023 - *Arnold conjecture on $\mathbb{C}P^n$ as a bifurcation problem*, The 13th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Wilmington NC, USA
- 17.09.2020 - *A new analytical setting for Hamiltonian systems on cotangent bundle*, DMV Annual Meeting 2020, minisymposium, Chemnitz
- 6.09.2019 - *Homotopy classes of gradient proper maps*, Jubilee Congress for the 100th anniversary of the Polish Mathematical Society, Kraków
- 17.09.2018 - *The existence of a maximal bounded invariant set*, Joint meeting of the Italian Mathematical Union, the Italian Society of Industrial and Applied Mathematics and the Polish Mathematical Society, Wrocław

5.7 Krótkie pobyty naukowe

- 15.01-15.02.2015 - Visiting scholar at **Massachusetts Institute of Technology**, Cambridge, współorganizacja miesięcznego kursu "Seiberg-Witten theory and Conley index", na zaproszenie prof. Tomasza Mrówki

5.8 Nagrody i wyróżnienia

- Pierwsze wyróżnienie w konkursie im. Juliusza Schaudera dla młodych matematyków (2020)
- Nagroda Rektora PG za osiągnięcia naukowe
- Zespołowa Nagroda Rektora PG za osiągnięcia organizacyjne
- Stypendium Prezesa Rady Ministrów
- Dwukrotny tytuł Finalisty Olimpiady Matematycznej

5.9 Inna działalność akademicka

- Recenzje do czasopism:
 - Journal of Dynamics and Differential Equations (wielokrotnie),
 - Topological Methods in Nonlinear Analysis (wielokrotnie),
 - Journal Journal of Applied and Computational Topology.
- Członek Rady Dyscypliny w kadencji 2024-2027
- Opieka nad dwoma pracami magisterskimi, opieka nad pracami licencjackimi (wielokrotnie), recenzje prac licencjackich i magisterskich (15+)
- Dydaktyka
 - wykłady:
 - * analiza funkcjonalna 2,
 - * topologia,
 - * teoria miary;
 - ćwiczenia:
 - * analiza matematyczna,
 - * algebra liniowa,
 - * algebra,
 - * analiza rzeczywista i zespolona,
 - * topologia,
 - * teoria miary,
 - * analiza funkcjonalna,
 - * formy różniczkowe,

* przestrzenie Sobolewa

- Członek Polskiego Towarzystwa Matematycznego (PTM) od 2016 roku
- Prezes Naukowego Koła Matematyki Studentów Politechniki Gdańskiej w latach 2009-2010
- Członek komitetu okręgowego Olimpiady Matematycznej w latach 2014-2017
- Członek komitetu okręgowego Olimpiady Matematycznej Juniorów w latach 2014-2018

Referencje

- [AM05] A. Abbondandolo, P. Majer. *A Morse complex for infinite dimensional manifolds - Part I*. Adv. Math., 197:321–410, 2005
- [AM04] A. Abbondandolo, P. Majer, *Lectures on the Morse complex for infinite dimensional manifolds*. Summer School on Morse theoretic methods in non-linear analysis and symplectic topology, Kluwert, Montreal. 2004
- [AM09] A. Abbondandolo, P. Majer *Infinite dimensional Grassmannians*. Journal of Operator Theory (2009): 19-62.
- [AH] P. Albers, D. Hein, *Cuplength estimates in Morse cohomology*, J. Topol. Anal. (2016), 8(2) 243–272
- [APS] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry III*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 79, 1976, 71–99
- [B] R. Bott *Morse theory indomitable*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 1988
- [Con] Ch. C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index* American Mathematical Society, 1978
- [CZ] Ch. C. Conley, E. Zehnder, *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of VI Arnold*. Inventiones mathematicae 73 (1983): 33-49.
- [CV] S. Cingolani, G. Vannella, *Critical groups computations on a class of Sobolev Banach spaces via Morse index*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 2003

- [DzGU] Z. Dzedzej, K. Gęba, W. Uss, *The Conley index, cup-length and bifurcation*. Journal of Fixed Point Theory and Applications 10.2 (2011): 233-252.
- [E] Y. Eliashberg, *Estimates on the number of fixed points of area preserving transformations*, Syktyvkar University, preprint 1979.
- [FP] P.M. Fitzpatrick, J. Pejsachowicz, *Orientation and the Leray-Schauder theory for fully nonlinear elliptic boundary value problems*, Mem. Amer. Math. Soc. 101, 1993, no. 483
- [F] A. Floer, *Proof of the Arnold conjecture for surfaces and generalizations to certain Kahler manifolds*. Duke Math. J. 53 (1986) 1–32.
- [Fo] B. Fortune, *A symplectic fixed point theorem for $\mathbb{CP}^n$* . Inventiones mathematicae 81, no. 1 (1985): 29-46.
- [GIP] K. Gęba, M. Izydorek, A. Pruszek, *The Conley index in Hilbert spaces and its applications*. Studia Mathematica 134.3 (1999): 217-233
- [Go] R. Golovko, *On variants of Arnold conjecture*. Archivum Mathematicum (Brno) 56 (2020):277-286
- [HV] H. Hofer, C. Viterbo, *The Weinstein conjecture in cotangent bundles and related results*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (2), 15(3):411–445, 1988.
- [HZ] H. Hofer, E. Zehnder, *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhauser Advanced Texts, 1994.
- [IJW] M. Izydorek, J. Janczewska, N. Waterstraat, *The equivariant spectral flow and bifurcation of periodic solutions of Hamiltonian systems*, Nonlinear Anal. 211, 2021, Paper No. 112475
- [KRT] J. Kędra, Y. Rudyak, A. Tralle, *Symplectically aspherical manifolds*. J. fixed point theory appl. 3, 1–21 (2008). <https://doi.org/10.1007/s11784-007-0048-z>
- [KSz] W. Kryszewski, A. Szulkin *An infinite dimensional Morse theory with applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 3181–3234.
- [K] N. H. Kuiper, *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*. Topology, 3(1), 19-30. (1965)

- [KR] D. Kundu, and Y. Rudyak, *Maps of degree 1, Lusternik–Schnirelmann category, and critical points*. Topology and its Applications 343 (2024): 108797.
- [MP] Mercuri F., Palmieri G., Problems in extending Morse theory to Banach spaces, Boll. UMI12 (1975) 397-401
- [O] Y.-G. Oh, *A symplectic fixed point theorem on $\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{CP}^k$* . Mathematische Zeitschrift 203, no. 1 (1990): 535-552.
- [Pa] A. Parusiński, Gradient homotopies of gradient vector fields, Studia Math. XCVI (1990), 73–80
- [PW] J. Pejsachowicz, N. Waterstraat, *Bifurcation of critical points for continuous families of C^2 -functionals of Fredholm type*, J. Fixed Point Theory Appl. 13, 2013, 537–560
- [Rab] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. No. 65. American Mathematical Soc., 1986.
- [RO] Yu. B. Rudyak, J. Oprea, *On the Lyusternik-Schnirelmann category of symplectic manifolds and the Arnold conjecture*. Math. Z. 230, no. 4 (1999):673-678
- [Sa] D. Salamon, *Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets*. Transactions of the American Mathematical Society, 291(1):1–41, 1985.
- [Sm] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*. Bull. Am. Math. Soc., 1967
- [Sz] A. Szulkin *Cohomology and Morse theory for strongly indefinite functionals*, Math. Z. 209 (1992), 375–418.
- [T] F. Takens *The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lusternik-Schnirelman category*. Inventiones mathematicae 6.3 (1968): 197-244.
- [Ta] C. H. Taubes *The Seiberg–Witten equations and the Weinstein conjecture*. Geometry & Topology 11.4 (2007): 2117-2202.
- [Tr] A. J. Tromba, *A general approach to Morse theory*, J. Differential Geom.12 (1977) 47-85.

- [Uh] K. Uhlenbeck, *Morse theory on Banach manifolds*, J. Funct. Anal. 10 (1972) 430-445.
- [W] A. Weinstein *On the hypotheses of Rabinowitz' periodic orbit theorems*. Journal of differential equations 33.3 (1979): 353-358.